"L'arithmétique dans $\mathbb{N}$:"

"I- Nombre pairs - Nombre impairs :"

- Activitée : On considère les nombres suivants : $0; \sqrt{15}; \sqrt{9}; 3,13; 133; 224; \frac{20}{2}$

- Parmi les nombres précédent trouver :
  - Tous les nombres entiers naturels ;
  - Tous les nombres pairs ;
  - Tous les nombres impairs ;

- Solution :

- Tous les nombres entiers naturels ;
  $0; \sqrt{9}; 133; 224, \frac{20}{2}$
- Tous les nombres pair ;
  $0; 224; \frac{20}{2}$
- Tous les nombres impairs ;
  $\sqrt{9}; 133$

"Définition 1 :"

- Les nombres entiers naturels forment un ensemble qu'on note $\mathbb{N}$ tel que :

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; ...\}$$

- Les nombres entiers naturels non nuls forment un ensemble qu'on note $\mathbb{N}^*$ tel que :

$$\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; 4; 5 ...\}$$

"- Exemple :"

3 est entiers naturel on dit que 3 appartient à l'ensemble $\mathbb{N}$ et on écrit : $3 \in \mathbb{N}$

-2 n'est pas un entier naturel on dit que -2 n'appartient pas à l'ensemble $\mathbb{N}$ et on écrit : $-2 \notin \mathbb{N}$

Definition 2 :

- Soit $a \in \mathbb{N}$:

✓ On dit que a est pair s'il existe un nombre k de $\mathbb{N}$ tel que : $a = 2k$

✓ On dit que a est impair s'il existe un nombre k de $\mathbb{N}$ tel que : $a = 2k+1$

- Exemple :

✓ On a $24 = 2 \times 12$ alors 24 est pair

✓ On a $35 = 2 \times 17 + 1$ alors 35 est impair

- Propriété : Soient a et b deux nombres de $\mathbb{N}$

a	b	$a+b$	$a-b$ $(a \geq b)$	$a \times b$
pair	pair	pair	pair	pair
pair	impair	impair	impair	pair
impair	pair	impair	impair	pair
impair	impair	pair	pair	impair

- Démonstration :

Soient a et b deux nombres pairs :

c-à-d : $a = 2k$ et $b = 2k'$ tels que k et k' de $\mathbb{N}$

alors : $a + b = 2k + 2k'$

$= 2(k + k')$

$= 2l$ tel que $l = k + k' \in \mathbb{N}$

d'où : $a + b$ est pair

(même démarche pour les autres cas)

"- Application 1 :"

1. Etudier la parité des nombres suivants :

$235 + 321$; $15^2 - 13^2$; 32×15

2. Soit $n \in \mathbb{N}$: Etudier la parité des nombres suivants.

$32n + 5$; $4n^2 + 2n + 3$; $1 + (n+1)^2 + (n+2)^2$

- Solution :

"1. La parité de $235 + 321$:"

on a : $235 = 2 \times 117 + 1$ alors 235 est impair

et : $321 = 2 \times 160 + 1$ alors 321 est impair

donc : $235 + 321$ est pair car la somme de deux nombres impairs est pair.

"- La parité de $75^2 - 13^2$:"

On a : $75 = 2 \times 37 + 1$ alors 75 est impair

et : $75^2 = 75 \times 75$ alors 75^2 est impair car le produit de deux nombres impais est impair

On a : $13 = 2 \times 6 + 1$ alors 13 est impair

et : $13^2 = 13 \times 13$ alors 13^2 est impair car le produit de deux nombres impair est impair

d'où : $75^2 - 13^2$ est pair car la soustration de deux nombres impair est pair

"- La parité de 32×15 :"

On a : $32 = 2 \times 16$ alors 32 est pair

et : $15 = 2 \times 7 + 1$ alors 15 est impair

donc : 32×15 est pair car le produit de deux nombres différents parité est pair

"2. La parité de $32n + 5$:"

on : $32n + 5 = 32n + 4 + 1$

$= 2(16n + 2) + 1$

$= 2 \times k \times 1$ / $k = 16n + 2 \in \mathbb{N}$

d'où $32n + 5$ est impair

Scanné avec CamScanner

- La parité de $4n^2+2n+3$:

On a : $4n^2+2n+3 = 2\times 2n^2+2\times n+2\times 1$
$= 2(2n^2+n+1)+1$
$= 2k'+1 \,/\, k'=2n^2+n+1 \in \mathbb{N}$

donc : $4n^2+2n+3$ est impair.

- La parité de $1+(n+1)^2+(n+2)^2$:

on a : $1+(n+1)^2+(n+2)^2 = 1+n^2+2n+1+n^2+4n+4$
$= 6+2n^2+6n$
$= 2(3+n^2+3n)$
$= 2k'' \,/\, k''=3+n^2+3n \in \mathbb{N}$

donc : $1+(n+1)^2+(n+2)^2$ est pair

- Propriété : Le produit de deux nombre consécutifs est toujours pair

- Demonstration : Soit $n\in\mathbb{N}$:

Montrons que $n(n+1)$ est pair :

* Si n est pair c-à-d $n=2k \,/\, k\in\mathbb{N}$

on a : $n(n+1) = 2k(2k+1)$
$= 2l \,/\, l=k(2k+1)\in\mathbb{N}$

donc $n(n+1)$ est pair

* Si n est impair c-à-d $n=2k+1 \,/\, k\in\mathbb{N}$

on a : $n(n+1) = (2k+1)(2k+1+1)$
$= (2k+1)(2k+2)$
$= (2k+1)\times 2\times(k+1)$
$= 2(2k+1)(k+1)$
$= 2l' \,/\, l'=(2k+1)(k+1)\in\mathbb{N}$

donc $n(n+1)$ est pair :

d'où $n(n+1)$ est pair pour tout $n\in\mathbb{N}$

Application : Soit $n\in\mathbb{N}$. Etudier la parité des nombres suivants : n^2+3n+2 ; $n^2+7n+13$

Scanné avec CamScanner

- Solution :

- La parité de n^2+3n+2 :

On a : $n^2+3n+2 = n^2+2n+n+2$
$= n(n+1)+2(n+1)$
$= (n+1)(n+2)$

donc n^2+3n+2 est pair car $n+1$ et $n+2$ sont deux nombres consécultifs

- La parité de $n^2+7n+13$:

On a : $n^2+7n+13 = n^2+n+6n+13$
$= n(n+1)+6n+13$

donc $n^2+7n+13$ est pair car le produit de deux nombres consultifs est pair

et on a : $6n+13 = 2\times 3n+6\times 2+1$
$= 2(3n+6)+1$
$= 2K+1$ tel que $K = 3n+6 \in \mathbb{N}$

Alors $6n+13$ est impair

donc $n^2+7n+13$ est impair car le produit de deux nombres de déffèrent Parité

- Autrement dit :

on a : $n^2+7n+13 = n^2+3n+4n+3\times 4+1$
$= n(n+3)+4(n+3)+1$
$= (n+3)(n+4)+1$

donc $(n+3)(n+4)$ est pair car le produit de deux nombres conséculltif est pair

c-à-d $(n+3)(n+4) = 2K'$ tel que $K' \in \mathbb{N}$

d'où : $n^2+7n+13 = 2K'+1$ c-à-d le nombre est impair

II_ Multiples d'un entier naturel _ PPCM de deux E.N

- Activité 2 :

1- Cocher les bonnes réponses :

	2	6	11	28	14	120	0
multiple de 2	X	X		X	X	X	X
multiple de 3		X				X	X
multiple de 5						X	X

2 a- Déterminer les dix premiers multiples de 4
b- " " " " " de 6
c- Déduire le plus petit commun multiple de 4 et 6

- Solution.

a- Les dix premiers multiples de 4 sont :
0; 4; 8; 12; 20; 24; 28; 32; 36;

b- Les dix premiers multiples de 6 sont :
0; 6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48; 54;

c- Le plus petit commun multiple non de 4 et 6 est 12

Définition

- Soient a et b deux nombres de $\mathbb{N}$
- On dit que a est le multiple de b s'il existe un nombre $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = k \times b$ et on écrit $a \in M_b$ avec M_b est l'ensemble des multiples de b.
- On note le plus petit commun multiple non nul de a et b par $PPCM(a;b)$ ou $a \vee b$

- Exemple :

On a : $M_3 = \{0; 3; 6; 9; 12; 15; 18 ...\}$

et $M_4 = \{0;4;8;12;16;20;24;28...\}$

- **Application 3:**

1- Déterminer tous les multiples de 3 et 5 qui sont < 40 :

2- Déterminer le PPCM (3;5)

- **Solution :**

1- On a : $M_3 = \{0;3;6;9;12;15;18;21;24;27;30;33;36;39...\}$

et on a : $M_5 = \{0;5;10;15;20;25;30;35...\}$

2- On a : PPCM (3;5) = 15

III- Diviseurs d'un entier naturel - PGCD de deux entiers naturels :

- **Activité 3 :**

1- Cocher les bonnes réponses :

	6	10	21	120
Divisible par 2	x	x		x
Divisible par 3	x		x	x
Divisible par 5		x		x

2- a- Déterminer les diviseurs de 12 :

b- Déterminer les diviseurs de 18 :

c- Déduire le plus grand commun diviseur de 12 et 18

- **Solution :**

2- a- Les diviseurs de 12 sont : 1; 2; 3; 4; 6; 12

b- Les diviseurs de 18 sont : 1; 2; 3; 6; 9; 18

c- le plus grand diviseur de 12 et 18 est : 6

"Définition 3"

- Soient a et b deux nombres de $\mathbb{N}$
- On dit que a est un diviseur de b s'il existe un nombre k de $\mathbb{N}$ tel que $b = k \times a$ $(a \neq 0)$ et on écrit $a \in D_b$ avec D_b est l'ensemble de diviseurs de b
- On note le plus grand commun diviseur de a et b par PGCD $(a;b)$ ou $(a \wedge b)$

"Remarque :"

Soit $n \in \mathbb{N}$, On dit que n est divisible par :
- 2 si le chiffre des unités est 0; 2; 4; 6; 8
- 3 ou 9 si la somme des ses chiffres est un multiple de 3 ou 9.
- 4 si le chiffre des unités et le chiffres des dizaines est multiple de 4.

"Exemple :"

- 4725 est divisible par 3 et 9 car $4+7+2+5=18$ est un multiple de 3 et 9.
- 1628 est divisible par 4 car 28 est multiple de 4

"- Application 4 : "Déterminer PGCD $(6;8)$ et PGCD $(36;9)$

"- Solution :"

- On détermine PGCD $(6;8)$

On a $D_6 = \{1; 2; 3; 6\}$

et $D_8 = \{1; 2; 4; 8\}$

Scanné avec CamScanner

donc PGCD$(6;8) = 2$

- On détermine PGCD$(36;9)$

On a $D_{36} = \{1;2;3;4;6;9;12;18;36\}$

et $D_9 = \{1;3;9\}$

donc PGCD$(36;9) = 9$

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que : $A = 7n^2 + 21n + 35$ est un multiple de 7.
2. Montrer que : $B = (2n+6)^2 + 8n + n(n+1)$ est pair.
3. Montrer que : $C = (4n-10)^2 + 4n + (n(n-1))$ est divisible par 4

" -Solution : "

1. on a $A = 7n^2 + 21n + 35$

$= 7(n^2 + 3n + 5)$

$= 7k$ tel que $k = n^2 + 3n + 5 \in \mathbb{N}$

Donc $7n^2 + 21n + 35$ est multiple de 7

On pose $n(n+1) = 2k$ tel que $k \in \mathbb{N}$ car c'est le produit de deux nombres consécutifs

2. On a : $B = (2n+6)^2 + 8n + n(n+1)$ est pair

$= (2(n+3))^2 + 2 \times 4n + 2k$

$= 4(n+3)^2 + 2 \times 4n + 2k$

$= 2(2(n+3)^2 + 4n + k)$

$= 2k'$ tel que $k' = (2(n+3)^2 + 4n + k) \in \mathbb{N}$

Donc B est un nombre pair

On pose $n(n-1) = 2l$ tel que $l \in \mathbb{N}$ car c'est le produit de deux nombres consécutifs

3. On a : $C = (4n-10)^2 + 4n + (n(n-1))^2$

$= (2(2n-5))^2 + 4n + (2l)^2$

$= 4(2n-5)^2 + 4n + 4l^2$

$= 4((2n-5)^2 + n + l^2)$

$= 4l'$ tel que $l' = ((2n-5)^2 + n + l^2) \in \mathbb{N}$

Donc C est divisible par 4

IV _ Les nombres premiers :

Activitée 4 : Déterminer les diviseurs des nombres : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11

- Que remarquez vous ?

$D_2 = \{1;2\}$; $D_3 = \{1;3\}$ $D_5 = \{1,5\}$

$D_7 = \{1;7\}$; $D_{11} = \{1;11\}$

- On remarque que ces nombres sont divisible par 1 et lui - même.

Définition 4

- Un entier naturel est dite premier s'il possède 2 diviseur 1 et lui- même

Exemple : 2,3 ; 5 ; 7 ; 11 et 13 sont des nombres premiers

Remarque

* 1 n'est pas un nombre premier car il ne possédé qu'un seul diviseur.
* 2 le seul nombre pair est premier
* Pour etudier la primalité d'un nombre entier n ; on cherche tous les nombres premiers p qui vérifient $p \leq \sqrt{n}$. Si n est divible par l'un de ces nombres alors n n'est pas un nombre premier si non n est premier.

- Exemple :

- Le nombre 37 est-il premier ?

On a $\sqrt{37} = 6{,}08$ et les nombres premiers inférieur ou égale à $\sqrt{37}$ sont 2 ; 3 et 5

- On 37 n'est pas divisible par 2 ; 3 ; et 5 Alors 37 est un nombre premier.

- **Application 7 :**

Étudier la primalité des nombres suivants :

101 ; 137 ; 1563

- **Solution :**

- On a $\sqrt{101} = 10,04$ et les nombres inférieurs ou égale à $\sqrt{101}$ est 2 ; 3 ; 5 et 7.

et On a 101 n'est pas divisible à 2 ; 3 ; 5 et 7 alors 101 est un nombre premier.

- On a $\sqrt{137} = 11,70$ et les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{137}$ est 2 ; 3 ; 5 ; 7 et 11 On 137 n'est pas divisible à 2 ; 3 ; 5 ; 7 et 11 alors 137 est un Nombres premiers

- On a : 1563 est divisible par 3 donc : 1563 n'est pas un nombre premier.

V - Décomposition en produit de facteurs premiers :

- **Propriété :** Tout nombre entiers naturel supérieurs ou égale à 2 admet une composition en produit de facteurs premiers.

- **Exemple :** On a 30 | Donc 30 =

- **Propriété :**

1. Le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers naturels est égale au produit de facteurs commun entre les deux décomposition munis au plus petit exposant

2. Le plus petit commun multiple de deux nombres entiers naturels est égale au produit de facteurs communs et non

communs entre les deux décompositions munis au plus grand exposant.

"- Exemple :" On a $a = 2\times 3^2\times 5^3\times 7$ et $b = 2^3\times 3\times 5^2\times 11$

donc $PGCD(a;b) = 2\times 3\times 5^2$ et $PPCM(a;b) = 2^3\times 3^2\times 5\times$

"- Application :" Décomposer les nombres suivants en facteurs premiers

"- Solution :"

1) On décompose les nombres

→ On a

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

Donc $48 = 2^4\times 3$

→ On a

612	2
306	2
153	3
51	3
17	17
1	

Donc $612 = 2^2\times 3^2\times 17$

→ On a :

1530	2
765	3
255	3
85	5
17	17
1	

Donc $1530 = 2\times 3^2\times 5\times 17$

2. On a : $48 = 2^4\times 3$ et $612 = 2^2\times 3^2\times 17$

et $1530 = 2\times 3^2\times 5\times 17$

donc $PGCD(48;612) = 2^2\times 3$

et PPCM $(48;612) = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 17$

- Définition

Soient a et b deux nombres de $\mathbb{N}$

On dit que a et b sont premiers entre eux si

- PGCD$(a;b) = 1$

- Exemple : On a PGCD$(2;3) = 1$

donc 2 et 3 sont premiers entre eux