

Introduction sur les nombres rationnels

23-09-21

1) définition d'un nombre rationnel:

Soient a et b deux nombres entiers relatifs tel que $b \neq 0$.
Tout nombre qui s'écrit sous forme de $\frac{a}{b}$ est un nombre rationnel.

a est appelé le numérateur, b est appelé le dénominateur.

Exemple:

$\frac{-2}{-7}$ est un nombre rationnel son numérateur est -2 et son dénominateur est -7 .

$\frac{-7}{8}$ est un nombre rationnel son numérateur est -7 et son dénominateur est 8 .

Remarques:

Tout nombre entier relatif est un nombre rationnel.

$$-2 = \frac{-2}{1}$$

$$+8 = \frac{+8}{1}$$

Tout nombre décimal relatif est un nombre rationnel.

$$-1,2 = \frac{-12}{10}$$

$$-0,75 = \frac{-75}{100}$$

24-09-21

3) 0 est un nombre rationnel.

$$0 = \frac{0}{b} ; b \neq 0.$$

2) Signe d'un nombre rationnel.

Soit a et b deux nombres entiers relatifs tel que $b \neq 0$.

• Si a et b ont le même signe, alors $\frac{a}{b}$ est positif.

• Si a et b ont des signes différents, alors $\frac{a}{b}$ est négatif.

Applications: Déterminer le signe des nombres

$$\text{suivants: } \frac{-3}{4} ; \frac{-5}{-6} ; \frac{-3}{+10} ; \frac{+9}{-8}$$

$-\frac{3}{4}$ est **négalif**, car le numérateur -3 et le dénominateur 4 ont des signes différents

$-\frac{5}{6}$ est **positif**, car le numérateur -5 et le dénominateur -6 ont le même signe

$\frac{-3}{+10}$ est **négalif**, car le numérateur -3 et le dénominateur $+10$ ont des signes différents:

$\frac{+9}{-8}$ est **négalif** car le numérateur $+9$ et le dénominateur -8 ont des signes différents.

Remarque:

$$\bullet \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

$$\bullet \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

$$\bullet \frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = \frac{a}{-b}$$

3. Les différents écritures d'un nombre rationnel.

Soient a et b deux nombres entiers relatifs tel que $b \neq 0$.

On peut trouver plusieurs écritures du nombre $\frac{a}{b}$ par Multiplier le numérateur et le dénominateur par le même nombre entier relatif non nul.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}; k \neq 0.$$

Dériver le numérateur et le dénominateur par le même nombre entier relatif non nul.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \div m}{b \div m}; m \neq 0.$$

Application 1: Réduire au même dénominateur les nombres a et b dans chaque cas:

$$1) a = \frac{-3}{4}; b = \frac{7}{5}$$

$$a = \frac{-7}{7}; b = \frac{5}{3}$$

$$a = \frac{26}{3}; b = \frac{44}{7}$$

Solution:

$$1) a = \frac{-3}{11} = \frac{(-3) \times 5}{11 \times 5} = \frac{-15}{55}$$

$$b = \frac{7}{5} = \frac{7 \times 11}{5 \times 11} = \frac{77}{55}$$

$$2) a = \frac{-7}{6} = \frac{(-7) \times 4}{6 \times 4} = \frac{-28}{24}$$

$$b = \frac{3}{4} = \frac{3 \times 6}{4 \times 6} = \frac{18}{24}$$

$$3) a = \frac{2}{3} = \frac{2 \times 7}{3 \times 7} = \frac{14}{21}$$

$$b = \frac{4}{7} = \frac{4 \times 3}{7 \times 3} = \frac{12}{21}$$

Application 2: simplifier les nombres suivants:

$$\frac{-6}{24} = \frac{(-6) \div 6}{24 \div 6} = \frac{-1}{4}$$

$$\frac{-14}{21} = \frac{(-14) \div 7}{21 \div 7} = \frac{-2}{3}$$

$$\frac{-15}{20} = \frac{(-15) \div 5}{20 \div 5} = \frac{-3}{4}$$

$$\frac{-2}{-4} = \frac{2}{4} = \frac{2 \div 2}{4 \div 2} = \frac{1}{2}$$

Remarque:

Le nombre qui s'écrit sous forme de $\frac{p}{q}$ avec p et q sont des nombres décimaux relatifs et $q \neq 0$ est un nombre rationnel.

Exercice 1: Ecrire les nombres rationnels suivants sous forme d'un nombre rationnel dont son dénominateur est 12.

$$\frac{-3}{6} = \frac{(-3) \times 2}{6 \times 2} = \frac{-6}{12}$$

$$\frac{-18}{24} = \frac{(-18) \div 2}{24 \div 2} = \frac{-9}{12}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{2 \times 3}{4 \times 3} = \frac{6}{12}$$

$$\frac{-13}{2} = \frac{(-13) \times 6}{2 \times 6} = \frac{-78}{12}$$

$$\frac{15}{36} = \frac{15 \div 3}{36 \div 3} = \frac{5}{12}$$

Exercice 2: compléter les égalités suivantes:

$$\frac{24}{-15} = \frac{-8}{5} ; \frac{-5}{3} = \frac{-10}{6} ; \frac{-3}{12} = \frac{15}{-6} ; \frac{-2}{3} = \frac{-2}{12}$$

Exercice 3: Déterminer le signe des nombres suivants en justifiant la réponse: $-\frac{3}{6}$; $-\frac{18}{+24}$; $-\frac{27}{-31}$; $-\frac{131}{+5}$
 $-\frac{37}{-115}$

- $-\frac{3}{6}$ est négatif car le numérateur -3 et le dénominateur 6 ont des signes différents.
- $-\frac{18}{+24}$ est négatif car le numérateur -18 et le dénominateur $+24$ ont des signes différents.
- $-\frac{27}{-31}$ est positif car le numérateur -27 et le dénominateur -31 ont le même signe.
- $-\frac{131}{+5}$ est négatif car le numérateur $+131$ et le dénominateur $+5$ ont le même signe.
- $-\frac{37}{+115}$ est négatif car le numérateur -37 et le dénominateur $+115$ ont des signes différents.

Exercice 4:

- 1) Réduire au même dénominateur les nombres $\frac{4}{4}$ et $-\frac{3}{3}$.
- 2) Simplifier les nombres $-\frac{36}{45}$; $\frac{20}{16}$; $-\frac{14}{21}$; $-\frac{15}{25}$.
- 3) Prendre entier relatif le numérateur et le dénominateur des nombres: $-\frac{3 \cdot 16}{2 \cdot 45 \cdot 4}$ et $-\frac{12 \cdot 3}{4 \cdot 75}$.

Réponse :

$$1) \frac{4}{5} = \frac{4 \times 4}{5 \times 4} = \frac{16}{20}$$

$$\frac{-3}{4} = \frac{(-3) \times 5}{4 \times 5} = \frac{-15}{20}$$

$$e) \frac{-36}{45} = \frac{(-36) \div 9}{45 \div 9} = \frac{-4}{5}$$

$$\frac{20}{16} = \frac{20 \div 4}{16 \div 4} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{-14}{21} = \frac{(-14) \div 7}{21 \div 7} = \frac{-2}{3}$$

$$\frac{-15}{25} = \frac{(-15) \div 5}{25 \div 5} = \frac{-3}{5}$$

$$3) \frac{-3,16}{2,4574} = \frac{(-3,16) \times 10000}{2,4574 \times 10000} = \frac{-31600}{24574}$$

$$\frac{-12,3}{4,75} = \frac{(-12,3) \times 100}{4,75 \times 100} = \frac{-1230}{475}$$

4 - comparaison des nombres rationnels.

Règle 1: (signes différents).

Pour comparer deux nombres rationnels qui ont des signes différents, le plus grand nombre est le nombre positif.

Exemple :

$$\frac{-1}{9} < \frac{2}{7} ; \frac{5}{-9} < \frac{-10}{-3} ; \frac{-8}{-11} > \frac{2}{5}$$

Règle 2: (même dénominateur)

Si on compare deux nombres rationnels qui ont le même signe et le même dénominateur, le plus grand nombre est le nombre qui a le plus grand numérateur.

Exemple:

$$\frac{-1}{7} > \frac{-5}{7} ; \frac{+8}{11} < \frac{15}{11} ; \frac{2}{-3} \neq \frac{5}{+3}$$

Règle 3:

Pour comparer deux nombres rationnels qui ont le même signe et n'ont pas le même dénominateur on réduit au même dénominateur

Exemple: comparer $\frac{-4}{3}$ et $\frac{-5}{2}$

$$\text{On a: } \frac{-4}{3} = \frac{(-4) \times 2}{3 \times 2} = \frac{-8}{6}$$

$$\text{et } \frac{-5}{2} = \frac{(-5) \times 3}{2 \times 3} = \frac{-15}{6}$$

$$\frac{-8}{6} > \frac{-15}{6}$$

$$\text{Donc } \frac{-4}{3} > \frac{-5}{2}$$

Exercice 5: comparer les nombres x et y dans chaque cas:

1) $x = \frac{-4}{7}$ et $y = \frac{-3}{5}$

2) $x = \frac{11}{3}$ et $y = \frac{-10}{-13}$

3) $x = \frac{11}{3}$ et $y = \frac{-5}{-11}$

Solution:

$$1) \frac{-4}{7} = \frac{(-4) \times 5}{7 \times 5} = \frac{-20}{35}$$

$$\frac{-3}{5} = \frac{(-3) \times 7}{5 \times 7} = \frac{-21}{35}$$

$$\text{on a: } \frac{-20}{35} > \frac{-21}{35}$$

$$\text{Donc: } \frac{-4}{7} > \frac{-3}{5}$$

2) On a $\frac{11}{3}$ est négatif et $\frac{-10}{-13}$ est positif.
Donc $\frac{11}{3} > \frac{-10}{-13}$

$$3) \frac{11}{3} = \frac{11 \times 11}{3 \times 11} = \frac{121}{33}$$

$$\frac{-5}{-11} = \frac{5}{11} = \frac{5 \times 3}{11 \times 3} = \frac{15}{33}$$

$$\text{On a } \frac{121}{33} > \frac{15}{33}$$

$$\text{Donc } \frac{11}{3} > \frac{-5}{-11}$$

Exercice 6 :

1) Est-ce que $-\frac{3}{8}$ et $-\frac{12}{32}$ sont égaux ? Justifier.

2) Est-ce que $\frac{4}{5}$ et $-\frac{12}{30}$ sont opposés ? Justifier.

3) Déterminer le nombre rationnel qui est égale à $-\frac{7}{3}$ et son dénominateur est 12.

4) Déterminer le nombre rationnel qui est égale à $\frac{24}{20}$ et son numérateur est -6.

5) Rendre entier relatif le dénominateur du nombre $-\frac{1,45}{2,7}$.

Solution :

$$1) \text{ on a } -3 \times 32 = -96 \text{ et } -12 \times 8 = -96$$

Donc $-\frac{3}{8}$ et $-\frac{12}{32}$ sont égaux.

$$2) \text{ On a } 4 \times (-15) = -60 \text{ et } (-12) \times (-5) = 60$$

Donc $\frac{4}{5}$ et $-\frac{12}{30}$ sont opposés.

$$3) \frac{-7}{3} = \frac{(-7) \times 4}{3 \times 4} = \frac{-28}{12}$$

$$4) \frac{24}{20} = \frac{24 \div (-4)}{20 \div (-4)} = \frac{-6}{-5}$$

$$5) -\frac{1,45}{2,7} = \frac{(-1,45) \times 10}{2,7 \times 10} = \frac{-14,5}{27}$$