Calcul et opèration sur les nombres rèels

1- Racine carrè d'un nombre positif :

* On considère l'égalité suivante :

$$x^2 = 16$$

- Dèterminer le nombre positif qui verifie l'ègalitè :
- Le nombre positif qui vèrifie l'ègalitè est : 4
- On dit que 4 est la racine carrè de 16 et on ècrit : $\sqrt{16} = 4$

* Determiner les racines carrées suivantes :

$\sqrt{100} = 10$

$\sqrt{4} = 2$

$\sqrt{25} = 5$

$\sqrt{1} = 1$

$\sqrt{36} = 6$

$\sqrt{49} = 7$

$\sqrt{121} = 11$

$\sqrt{0} = 0$

- Si on veut dèterminer la valeur de $\sqrt{2}$ on va trouver une rèsultat qui n'est pas exacte.
- On dit que $\sqrt{2}$ est un nombres irrationel

* Les nombres réels est l'ensemble constitué des nombres rationnels et des nombres irrationnels.

* Remarque :

- $(\sqrt{a})^2 = a$
- $\sqrt{a^2} = a$
- $\sqrt{(-a)^2} = a$

* Exemples :

- $\sqrt{8^2} = 8$
- $\sqrt{(-7)^2} = 7$
- $(\sqrt{3})^2 = 3$
- $\sqrt{(-27)^2} = 27$
- $\sqrt{10^2} = 10$

2- Opérations sur les racines carrées :

1- Règle :

Soient a et b deux nombres positifs :

- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
- $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

* Exemples :

- $\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = 4$
- $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2$

- $\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{12 \times 3} = 6$
- $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

*** Remarque :**

- $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$
- $\sqrt{a} \mp \sqrt{b} \neq \sqrt{a \mp b}$
- $\sqrt{2} + \sqrt{5} =$ n'a pas calculer
- $\sqrt{25} - \sqrt{16} = 5 - 4 = 1$
- $\sqrt{7} + \sqrt{4} = \sqrt{7} + 2$

*** Règle 2 :**

Soient a et b deux nombres positifs :

- $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$
- $\sqrt{a \times b^2} = b\sqrt{a}$

*** application :**

1- simplifier les racines carrès suivants :

$\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = \sqrt{2^2 \times 6} = 2\sqrt{6}$

$\sqrt{72} = \sqrt{2^2 \times 2 \times 3^2} = 2 \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$

$\sqrt{48} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 3} = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

$\sqrt{300} = \sqrt{2^2 \times 3 \times 5^2} = 2 \times 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

3- Dèveloppment et factorisation :

1- Règle 1 :

Soient a, b et k des nombres réels :

$k(a+b) = ka + kb$

$k(a-b) = ka - kb$

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

* **Remarque :**

1- $K(a+b) = Ka + Kb$
produit somme
$K(a-b) = Ka - Kb$
produit différence

* Le développement c'est écrire un produit sous forme d'une somme ou une différence. pour celà on utilise la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction.
* La factorisation c'est écrire une somme ou une différence sous forme d'un produit.

• $Ka + Kb = K(a+b)$
somme produit
• $Ka - Kb = K(a-b)$
différence produit
• K est appelé le facteur commun

* **Application aux développement** -1

$A = 2(4x-5) = 2\times 4x - 2\times 5$
$= 8x - 10$

$B = 5(2x-\sqrt{3}) = 5\times 2x - 5\times\sqrt{3}$
$= 10x - 5\sqrt{3}$

$C = -8x(x-5) = -8x\times x + 8x\times 5$
$= -8x^2 + 40x$

$D = -4y(-2x+5) = 4y\times 2x - 4y\times 5$
$= 8xy - 20y$

$E = (-2x+5)(-4x+7)$
$= 2x \times 4x - 2x \times 7 - 5 \times 4x + 5 \times 7$
$= 8x^2 - 14 - 20x + 35$
$= 8x^2 - 34 + 35$

$F = (5a-4b)(-2a+b)$
$= -5a \times 2a + 5a \times b + 4b \times 2a - 4b \times b$
$= -10a^2 + 5ab + 8ab - 4b^2$
$= -10a^2 + 13ab - 4b^2$

* applications à la factorisation :

$G = 15x + 20$
$= 5 \times 3x + 5 \times 4$
$= 5(3x+4)$

$H = 18xy^2 - 12y^2$
$= 6 \times 3 \times x \times y - 6 \times 2 \times y \times y$
$= 6y(3x-2y)$

$I = 10x^2 + 8x^3$
$= 2 \times 5 \times x \times x + 2 \times 4 \times x \times x \times x$
$= 2x^2(5+4x)$

$J = (x-1)(x+3) + 2(x-1)$
$= (x-1)[(x+3)+2]$
$= (x-1)(x+3+2$
$= (x-1)(x+5)$

$K = (x+2)(3x-1) - (3x-1)(2x+5)$
$= (3x-1)[(x+2)-(2x+5)]$
$= (3x-1)(x+2-2x-5)$
$= (3x-1)(-x-3)$

* **Règle 2 :**

> Soient a et b des nombres réels :
> - $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
> - $(a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
> - $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

* **Identité remarquable et développement :**

$M = (2x + \sqrt{5})^2$
$= (2x)^2 + 2 \times 2x \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2$
$= 4x^2 + 4\sqrt{5}x + 5$

$N = (\sqrt{2}y + \sqrt{7})(\sqrt{2}y - \sqrt{7})$
$= (\sqrt{2}y)^2 - (\sqrt{7})^2$
$= 2y^2 - 7$

$L = (8x - 7y)^2$
$= (8x)^2 - 2 \times 8x \times 7y + (7y)^2$
$= 64x^2 - 112xy + 49y^2$

* **Identité remarquable et développement :**

$P = 4x^2 + 4\sqrt{5}x + 5$
$= (2x)^2 + 4\sqrt{5}x + (\sqrt{5})^2$
$= (2x)^2 + 2 \times 2x \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2$
$= (2x + \sqrt{5})^2$

$Q = x^2 - 7$
$= x^2 - (\sqrt{7})^2$
$= (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$

$R = 49y^2 - 14y + 1$
$= (7y)^2 - 14y + 1^2$
$= (7y)^2 - 2 \times 7y \times 1 + 1$
$= (7y - 1)^2$

* **Exercice 1 :**

1- Calculer les expressions suivants :

$A=\sqrt{49}-\sqrt{36}$

$B=\sqrt{25}-\sqrt{9}+\sqrt{36}$

$C=\sqrt{\frac{9}{5}}\times\sqrt{\frac{5}{36}}$

$D=3\sqrt{4}+7\sqrt{36}-4\sqrt{64}$

$E=\sqrt{\sqrt{2}-1}\times\sqrt{\sqrt{2}+1}$

$F=\sqrt{4+2\sqrt{3}}\times\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

2) a- Développer et réduire l'expression :

• $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$

b- Déduire la valeur de : $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$

* **solution :**

1) $A=\sqrt{49}-\sqrt{36}$

$=7-6$

$=1$

$B=\sqrt{25}-\sqrt{9}+\sqrt{36}$

$=5-3+6$

$=8$

$C=\sqrt{\frac{9}{5}}\times\sqrt{\frac{5}{36}}$

$=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{36}}$

$=\frac{3}{6}$

$=\frac{1}{2}$

$D = 3\sqrt{4} + 7\sqrt{36} - 4\sqrt{64}$
$= 3\times 2 + 7\times 6 - 4\times 8$
$= 6 + 42 - 32$
$= 16$

$E = \sqrt{\sqrt{2}-1} \times \sqrt{\sqrt{2}+1}$
$= \sqrt{(\sqrt{2}-1)\times(\sqrt{2}+1)}$
$= \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1^2}$
$= \sqrt{2-1}$
$= \sqrt{1} = 1$

$F = \sqrt{4+2\sqrt{3}} \times \sqrt{4-2\sqrt{3}}$
$= \sqrt{(4+2\sqrt{3})\times(4-2\sqrt{3})}$
$= \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2}$
$= \sqrt{16-12}$
$= \sqrt{4} = 2$

2) $a = (\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 = (\sqrt{5})^2 + 2\times\sqrt{5}\times\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$
$= 5 + 2\sqrt{15} + 3$
$= 8 + 2\sqrt{15}$

$b = \sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}$
$= \sqrt{5} + \sqrt{3}$

*Exercice 2 :

1- Monter que : $(7+\sqrt{2})^2 = 51 + 14\sqrt{2}$
2- Déduire la valeur de : $\sqrt{51+14\sqrt{2}}$
3- réduire les expression suivantes :
$G = 2\sqrt{50} + 4\sqrt{8} - 3\sqrt{72}$
$H = \sqrt{28} - 4\sqrt{63} + 3\sqrt{175}$

*solution

1) $(7+\sqrt{2})^2 = 7^2 + 2\times 7\times\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$
$= 49 + 14\sqrt{2} + 2$
$= 51 + 14\sqrt{2}$

2) $\sqrt{51+14\sqrt{2}} = \sqrt{(7+\sqrt{2})^2}$
$= 7+\sqrt{2}$

3) $G = 2\sqrt{50} + 4\sqrt{8} - 3\sqrt{72}$
$= 2\sqrt{25\times 2} + 4\sqrt{4\times 2} - 3\sqrt{36\times 2}$
$= 2\sqrt{5^2\times 2} + 4\sqrt{2^2\times 2} - 3\sqrt{6^2\times 2}$
$= 2\times 5\sqrt{2} + 4\times 2\sqrt{2} - 3\times 6\sqrt{2}$
$= 10\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 18\sqrt{2}$
$= (10+8-18)\sqrt{2}$
$= 0$

$H = \sqrt{28} - 4\sqrt{63} + 3\sqrt{175}$
$= \sqrt{4\times 7} - 4\sqrt{9\times 7} + 3\sqrt{25\times 7}$
$= \sqrt{2^2\times 7} - 4\sqrt{3^2\times 7} + 3\sqrt{5^2\times 7}$
$= 2\sqrt{7} - 4\times 3\sqrt{7} + 3\times 5\sqrt{7}$
$= 2\sqrt{7} - 12\sqrt{7} + 15\sqrt{7}$
$= (2-12+15)\sqrt{7}$
$= 5\sqrt{7}$

* **Exercice 3 :**

Résoudre les équations suivants :
$x^2 = 6$ * $x^2 = -1$ * $4x^2 = 9$

* **solution :**

* $x^2 = 6$

on a $6 > 0$ alors : $x = \sqrt{6}$ ou $x = -\sqrt{6}$
Donc l'équation admet deux solutions qui sont $\sqrt{6}$ et $-\sqrt{6}$

* $x^2 - 1$

$-1 < 0$ Donc l'équation n'admet pas de solution

* $4x^2 = 9$, $x^2 = \frac{9}{4}$

$x = \sqrt{\frac{9}{4}}$ ou $x = \sqrt{\frac{-9}{4}}$

$x = \frac{3}{2}$ ou $x = \frac{-3}{2}$

- Donc l'équation admet deux solution qui $\frac{3}{2}$ et $\frac{-3}{2}$

* En générale : $x^2 = a$
- Si $a > 0$ l'équation admet deux solution qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$ l'équation admet une seul solution qui est 0.
- Si $a < 0$ l'équation n'admet pas de solution

4- Expression conjuguée :

1- Règle :

a et b deux nombres positifs :

- $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$; $b \neq 0$
- $\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$; $a \neq b$
- $\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$; $a \neq b$

* Application :

$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$\frac{-3}{\sqrt{7}} = \frac{-3 \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{-3\sqrt{7}}{(\sqrt{7})^2} = \frac{-3\sqrt{7}}{7}$

Scanné avec CamScanner

$$\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{5\times(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})\times(\sqrt{7}+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3:2}$$

$$= \frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4}$$

$$\frac{-\sqrt{13}}{\sqrt{5}+2} = \frac{-\sqrt{13}\times(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)\times(\sqrt{5}-2)}$$

$$= \frac{-\sqrt{13}\times(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5})^2-2^2}$$

$$= \frac{-\sqrt{13}(\sqrt{5}-2)}{5-4}$$

$$= \frac{-\sqrt{13}(\sqrt{5}-2)}{1}$$

* Exercice 4 :

1) - Rendre rationnel le dénominateur des nombre suivantes :

$$\frac{-3}{\sqrt{5}} = \frac{-3\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{-3\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{-3\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{7}{3\sqrt{2}} = \frac{7\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{3\times 2} = \frac{7\times\sqrt{2}}{6}$$

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{7}\times(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)\times(\sqrt{5}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{7}(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1^2}$$

$$= \frac{\sqrt{7}(\sqrt{5}+1)}{5-1}$$

$$= \frac{\sqrt{7}(\sqrt{5}+1)}{5-1}$$

$$\frac{-2}{3+\sqrt{7}} = \frac{-2\times(3-\sqrt{7})}{(3+\sqrt{7})\times(3-\sqrt{7})}$$

$$= \frac{-2\times(3-\sqrt{7})}{3^2-(\sqrt{7})^2} =$$

$$=$$

$$= \frac{-2(3-\sqrt{7})}{9-7} = \frac{2(3-\sqrt{7})}{2}$$

* **Exercice 5 :**

\- Clacaler :

$$K = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{7}(\sqrt{7}+\sqrt{6})-\sqrt{6}(\sqrt{7}-\sqrt{6})}{(\sqrt{7}-\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})} =$$

$$= \frac{\sqrt{7}\times\sqrt{7}+\cancel{\sqrt{7}\times\sqrt{6}}-\cancel{\sqrt{6}\times\sqrt{7}}+\sqrt{6}\times\sqrt{6}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{6})^2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{7})^2+(\sqrt{6})^2}{7-6} =$$

$$= \frac{7+6}{1}$$

$$= 13$$

$$R = 9x^2-4+(x+1)(3x+2)$$

* **Exercice 6 :**

$$R = 9x^2-4+(x+1)(3x+2)$$

$$= (3x)^2-2^2+(x+1)(3x+2)$$

$$= (3x-2)(3x+2)+(x+1)(3x+2)$$

$$= (3x+2)[(3x-2)+(x+1)]$$

$$= (3x+2)(3x-2+x+1)$$

$$= (3x+2)(4x-1)$$