Calcul vectoriel

I. L'égalité de deux vecteurs - somme de deux vecteurs :

- Activité 1 : Soient A, B, C et D quatre points non confondus du plan.

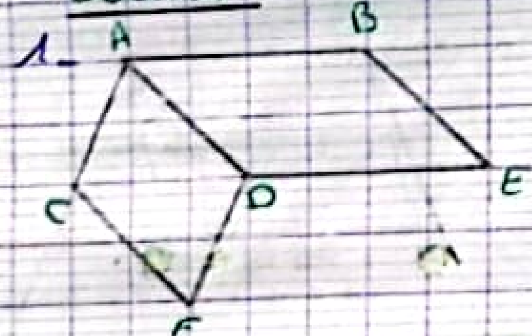
1- Construire les points E et F tel que :

$$\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{AD} \quad \text{et} \quad \vec{AF} = \vec{AC} + \vec{AD}$$

2- Montrer que $\vec{EF} = \vec{BC}$, puis déduire la nature de EFCB.

- Solution :

1-



Rép 1. 2- On a ABED est un parallélogramme.

Donc $\vec{BE} = \vec{AD}$

Alors $\vec{BE} = \vec{CF}$

c-a-d EFCB est un parallélogramme.

Donc $\vec{CB} = \vec{FE}$

Rép 2 : 2. On a $\vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AF}$

$= -\vec{AE} + \vec{AC} + \vec{AD}$

$= -(\vec{AB} + \vec{AD}) + \vec{AC} + \vec{AD}$

$= -\vec{AB} - \vec{AD} + \vec{AC} + \vec{AD}$

$= \vec{BA} + \vec{AC}$

$= \vec{BC}$

Donc $\vec{EF} = \vec{BC}$

et on a $\vec{EF} = \vec{BC}$

- donc EFCB est un parallélogramme.

Propriété 1 :

- On dit que deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont même direction, même sens et même norme.
- Soient A, B, C et D quatre points non confondus du plan.
  - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ signifie que ABCD est un parallélogramme
  - $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ signifie que ABCD est un parallélogramme
  - $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Relation de Chasles)
- Si A et B deux points confondus alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$

Application 1. Soit ABCD un parallélogramme et soient I et J, respectivement les milieux des segment [AB] et [DC] et K un point [AD]. M.q $\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{KC}$

Solution :

On montre que : $\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{KC}$

On a : $\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}$

$= \overrightarrow{KA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$= \overrightarrow{KD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$= \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DC}$

$= \overrightarrow{KC}$

Car I et J respectivement les milieu des [AB] et [DC]

car $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

ABCD est parallélogramme

Donc : $\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{KC}$

II - Multiplication d'un vecteur par un nombre réel.

Définition 1 :

- Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un nombre réel non nul.
- La multiplication du vecteur $\vec{u}$ par k est le vecteur qu'on note $k.\vec{u}$ ou $k\vec{u}$ telle que :
  - Si $k > 0$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $k.\vec{u}$ ont des sens contraires et $\|k.\vec{u}\| = -k\|\vec{u}\|$

Propriété 2

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et soient a et b deux nombres réels on a :

- $a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}$
- $(a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$
- $a(b\vec{u})=ab.\vec{u}$
- $1.\vec{u}=\vec{u}$

- **Exemple :**

- $5\vec{AB}-\frac{3}{2}\vec{AB}=(5-\frac{3}{2})\vec{AB}$
  $=\frac{7}{2}\vec{AB}$

- $2(-3\vec{AB})=-6\vec{AB}$

- $2\vec{AB}+2\vec{BC}=2(\vec{AB}+\vec{BC})$
  $=2\vec{AC}$

- $3\vec{AB}=\vec{0}$ alors $3=0$ ~~ou~~ (impossible) ou $\vec{AB}=\vec{0}$
  alors $\vec{AB}=\vec{0}$

*** Application :**

1- Simplifier les expressions suivantes :

$A=2(\vec{u}+5\vec{v})+3(\vec{u}-\vec{v})$

$B=13\vec{u}+3(-\vec{u}+4\vec{v})+2\vec{v}$

2- Soit x un nombre réel et soit $\vec{u}$ un vecteur non nul tel que $2x\vec{u}-\vec{u}=\vec{0}$

Déterminer la valeur de x

*** Solution :**

1- $A=2(\vec{u}+5\vec{v})+3(\vec{u}-\vec{v})$

$=2\vec{u}+10\vec{v}+3\vec{u}-3\vec{v}$

$=5\vec{u}+7\vec{v}$

$B = 18\vec{u} - 3(-\vec{u} + 4\vec{v}) + 2\vec{v}$

$= \vec{18} - 3\vec{u} + 12\vec{v} + 2\vec{v}$

$= \vec{15}\vec{v} + 14\vec{v}$.

2. On a $\vec{u}$ un vecteurs non nuls :

c-a-d : $2x\vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$

c-a-d : $\vec{u}(2x-1) = \vec{0}$

donc : $2x - 1 = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$ impossible ($\vec{u}$ non nul)

c-a-d : $x = \frac{1}{2}$

II. Colinéarité de deux vecteurs - Alignement de trois points :

"Définition et Propriété"

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
- On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel non nul k tel que

$\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$

- Soient A, B et C trois points du plan.
- On dit que A, B et C sont alignés si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.

"Remarque"

- Soient A, B, C et D quatre points du plan.
- On a $(AB) // (CD)$ si et seulement si $\vec{AB} = k\vec{CD}$ tel que k un réel non nul

- Application 3 :

I. ABC un triangle et soient D et E deux points tels que :

$\vec{AD} = 2\vec{AB} + \vec{AC}$ et $\vec{BE} = \frac{1}{3}\vec{BC}$

1. construire la figure.
2. Montrer que : $\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$
3. Déduire la relation entre $\vec{AE}$ et $\vec{AD}$
4. Que peut-on dire sur l'alignement des points A, E et D

II _ ABCD est un parallélogramme.

1 _ Placer le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

2 _ Placer le point N tel que $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$

3 _ Montrer que : $\overrightarrow{CM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

4 _ Montrer que : $\overrightarrow{MN} = \frac{9}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

5 Déduire que $(MN) \parallel (CM)$

* Solution :

I _ 1.

2 _ On a $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

c-a-d : $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

c-a-d : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

c-a-d : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

c-a-d : $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

3 _ On a : $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

c-a-d : $\overrightarrow{AE} = 2 \times \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \times \overrightarrow{AC}$

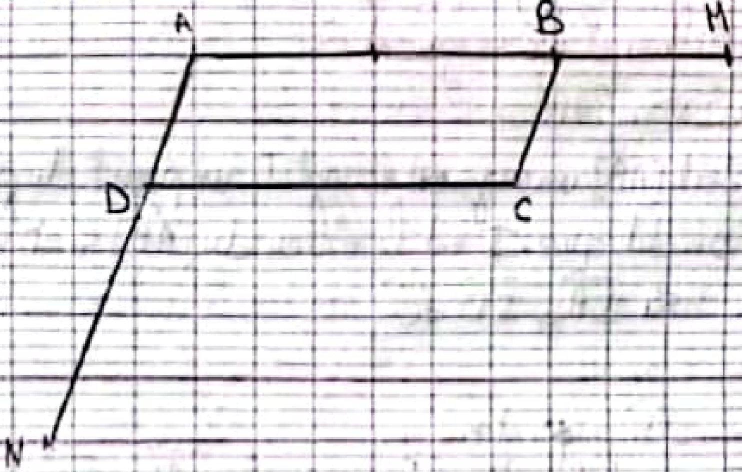
c-a-d : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

Donc : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

4- On sait que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ se signifier que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinaires

Alors, les points A;E;D sont alignées

II- 1-2



3- On a : $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

c-a-d : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

c-a-d : $\overrightarrow{CM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

4- On montre que : $\overrightarrow{NM} = \frac{9}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

on a : $\overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{AN} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$= -3\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$= -3(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$= -3\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{CD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$= -3\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

car $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ (ABCD parallélogramme.

$= -3\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$= \frac{9}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

donc : $\overrightarrow{NM} = \frac{9}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

5- On a $\overrightarrow{NM} = \frac{9}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$
$= 3\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)$
$\overrightarrow{NM} = 3\overrightarrow{CM}$
donc $\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires
d'où $(NM) \parallel (CM)$

IV- Milieu d'un segment :

"Définition"

- Soit $[AB]$ un segment et soit I un point du plan.
- On dit que I est le milieu du $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Propriétés

1. Si I est le milieu de $[AB]$ alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$
2. Soit I milieu du $[AB]$ et soit M un point du plan on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$
3. Soit ABC un triangle et soient I et J respectivement les milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$ On a : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BC}$

- Démonstration :

1) On a I milieu du $[AB]$ alors $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
On a $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$
On a $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ et $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$
On a $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$

2) On a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MB}$
$= 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AI}$
$= 2\overrightarrow{MI}$ car $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AI} = \vec{0}$

3- On a $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}$
S.g $= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
S.g $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$
S.g $= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

- et on a $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{BC}$

$\boxed{2\vec{IJ} = \vec{BC}}$

" - Exercice : ABC un triangle, soient I et J respectivement les milieux des [AB] et [AC].

1- Montrer que $\vec{BJ} = -\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ et $\vec{CI} = -\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AB}$

2- Soient M et N deux points tels que : $\vec{BM} = 2\vec{BJ}$ et $\vec{CN} = 2\vec{CI}$

a- Quelles est la nature de quadrilatere ACBN et ABCM ?

b- Montrer que les points A, M et N sont alignés

" - Solution : "

1- on a $\vec{BI} = \vec{BA} + \vec{AJ}$

$= -\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ car J le milieu de [AC]

et on a $\vec{CI} = \vec{CA} + \vec{AI}$

$= -\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AB}$ car I le milieu de [AB]

2 a- ABCM est un parallélogramme

car $\vec{BM} = 2\vec{BJ}$

$\vec{BM} = 2(-\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC})$

$\vec{BM} = -2\vec{AB} + \vec{AC}$

$\vec{BA} + \vec{AM} = 2\vec{BA} + \vec{AC}$

$\vec{AM} = 2\vec{BA} + \vec{AC} - \vec{BA}$

$\vec{AM} = \vec{BA}(2-1) + \vec{AC}$

$\vec{AM} = \vec{BA} + \vec{AC}$

donc $\vec{AM} = \vec{BC}$

On a ACBN est un parallélogramme

car $\vec{CN} = 2\vec{CI}$

$= 2(-\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AB})$

$\vec{CN} = -2\vec{AC} + \vec{AB}$

$\vec{CA} + \vec{AN} = 2\vec{CA} + \vec{AB}$

$\vec{AN} = 2\vec{CA} + \vec{AB} - \vec{CA}$

$= \vec{CA}(2-1) + \vec{AB}$

$= \vec{CA} + \vec{AB}$

donc $\vec{AN} = \vec{CB}$

b- on a $\vec{AM} = \vec{BC}$

et $\vec{AN} = \vec{CB}$ donc $\vec{NA} = \vec{BC}$

alors $\vec{AM} = \vec{NA}$

c-a-d $\vec{AM}$ et $\vec{NA}$ deux vecteurs colinéaires

c-a-d A, M et N sont des points alignés