

Les puissances

1- Puissance d'un nombre réels :

Soient a un nombre réels et n un nombre entier naturel.

- on peut définir le produit :

$$a \times a \times a \dots \times a$$

n facteurs :

- Dans ce cas on a :

$$a^n = a \times a \times \dots \times a$$

n fois

a est appelé la puissance de a d'ordre n

a est appelé la base de a^n

n est appelé l'exposant de a^n

* Exemples :

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

$$\left(\frac{-5}{2}\right)^2 = \frac{-5}{2} \times \frac{-5}{2} = \frac{25}{4}$$

$$(\sqrt{5})^3 = \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

* Cas particuliers :

$$a^1 = a ; 1^n = 1$$

$$0^n = 0 \text{ si } n \neq 0$$

$$a^0 = 1 \text{ si } a \neq 0$$

$$(-1)^n \begin{cases} -1 ; n \text{ impaire} \\ 1 ; n \text{ paire} \end{cases}$$

* Règle 1:

a et b deux nombres réels non nuls et n un entier naturel:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

* Exemples:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{9}$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{64}{125}$$

$$\left(\frac{-9}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{-9}\right)^2 = \frac{7}{-9} \times \frac{7}{-9} = \frac{49}{81}$$

* Règle 2:

Soient n un entier naturel:

$$10^n = 100 \dots 0$$

n zéros

$$10^{-n} = 0,0 \dots 01$$

* Exemple:

$$10^4 = 10000$$

$$10^{-7} = 0,0000001$$

$$10^{-3} = 0,001$$

$$10^2 = 100$$



* Règle 3 :

Soient a un nombre réels et n un nombre entier naturel.

- Si n est paire alors a^n est positif.
- Si n est impaire alors le signe de a^n est le signe de a .

* Exemple :

* $\left(\frac{-8}{3}\right)^{10}$ = est positif car l'exposant 10 est paire.

* $\left(\frac{-8}{-3}\right)^{23}$ = est positif car l'exposant 23 est impaire et la base $-\frac{8}{-3}$ est positif.

* $\left(\frac{3}{-15}\right)^{127}$ = est négatif car l'exposant 127 est impaire et la base $\frac{3}{-15}$ est négatif.

↳ Opérations sur les puissances :

* Règle :

a et b deux nombres réels m et n deux entiers relatif :

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad (\text{produit de deux puissance de même base.})$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (\text{quotient de deux puissance de même base.})$$

$$a^m \times b^m = (a \times b)^m \quad (\text{produit de deux puissance qui ont la même base.})$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad (\text{quotient de deux puissance qui ont la même exposant.})$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n} \quad (\text{puissance d'une puissance.})$$

* Exemples :

$$(-7)^3 \times (-7)^{-2} = (-7)^{3+(-2)} = -7$$

$$0,85^{1000} \times 4^{2000} = (0,85 \times 4)^{2000}$$

$$\frac{5^4}{5^2} = 5^{4-2} = 5 \times 5 = 25$$

$$\frac{360^4}{36^4} = \left(\frac{360}{36}\right)^4 = 10^4 = 0,0001$$

$$[(-3)^{-2}]^{-1} = (-3)^{(-2) \times (-1)} = (-3)^{2} = (-3) \times (-3) = 9$$

3- l'écriture scientifique :

* Soit x un nombre décimal l'écriture scientifique de x est sous forme :

$$x = a \times 10^m$$

* avec $1 \leq a < 10$ et m un entier relatif et :

$$-x = -a \times 10^m$$

* Exemples :

$$0,00000069 = 6,9 \times 10^{-7}$$

$$2434,9 = 2434,9 \times 10^0$$

$$0,000007 = 7 \times 10^{-6}$$

$$42,7 = 4,27 \times 10^1$$

$$-0,000425 = -4,25 \times 10^{-4}$$

$$-93475,11 = -9,347511 \times 10^4$$

* Remarque :

Si $1 \leq a < 10$ alors

$$a = a \times 10^0$$

$$-a = -a \times 10^0$$

* Exercice 1 :

1- Calculer les expressions suivantes :

$$A = \frac{-2}{3} \times \left(\frac{5}{7}\right)^2$$

$$= \frac{-2}{3} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7}$$

$$= \frac{-2 \times 5 \times 5}{3 \times 7 \times 7}$$

$$B = \left(\frac{-4}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \left(\frac{-4}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{(-4)^2}{3^2} \times \frac{1^3}{2^3}$$

$$C = \frac{10^{-2}}{10^{-3}} \times 3^{-1}$$

$$= 10^{(-2)-(-3)} \times \frac{1}{3}$$

$$= 10^{-2+3} \times \frac{1}{3}$$

$$= 10^1 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{10}{3}$$

2- Réduire les expressions suivantes :

$$D = a^3 \times a^{-7} \times a^7$$

$$= a^{3+(-7)+7}$$

$$= a^3$$

$$E = \frac{0,01 \times 10^{-3}}{0,0001 \times 10^{-4}}$$

$$= \frac{0,01 \times 10^{-3}}{0,0001 \times 10^{-4}}$$

$$= \frac{10^{-2} \times 10^{-3}}{(10^{-4})^{-4}}$$

$$= \frac{10^{(-2)+(-3)}}{10^{(-4) \times (-4)}}$$

$$= \frac{10^{-5}}{10^{16}}$$

$$= \frac{10^{-5}}{10^{16}}$$

$$= 4 \cdot 10^{(5)-16}$$

$$= 4 \cdot 10^{-11}$$

3- Trouver l'écriture scientifique des nombres :

$$-0,000427 = -4,27 \times 10^{-4}$$

$$749,3 = 7,493 \times 10^2$$

Exercice 2 :

1- Déterminer en justifiant la réponse le signe de $(-\sqrt{5})^{2013}$ et $(\frac{-4}{\sqrt{11}})^{20}$

2- tracer l'écriture scientifique du nombre :

$$H = \frac{11 \times 10^{-9}}{5 \times 10^{-8}}$$

$(-\sqrt{5})^{2013}$ est négatif car l'exposant 2013 est impaire et la base $-\sqrt{5}$ est négatif.

$(\frac{-4}{\sqrt{11}})^{20}$ est positif car l'exposant 20 est paire.

$$H = \frac{11 \times 10^{-9}}{5 \times 10^{-8}}$$

$$= \frac{11 \times 10^{-9} \times 10^8}{5 \times 10^{-8} \times 10^8}$$

$$= \frac{11 \times 10^{-1}}{5 \times 10^0}$$

$$= \frac{11}{5} \times \frac{10^{-1}}{10^0}$$

$$= 2,2 \times 10^{-4}$$

$$= 2,2 \times 10^{-4} \times 10^0$$

$$= 2,2 \times 10^{-4+0}$$

$$= 2,2 \times 10^{-4}$$