" La Projection dans le plan "

" I- Projection sur une droite : "

" 1- Projection sur une droite parallèlement à une ax."

- Activité 1 : Soient (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en un point O et soit ABCD un quadrilatère tel que $C \in (\Delta)$ et $D \in (\Delta')$ et $(BD) \parallel (\Delta)$

1.a- construire la droite (P) passante par A et parall à la droite (Δ)

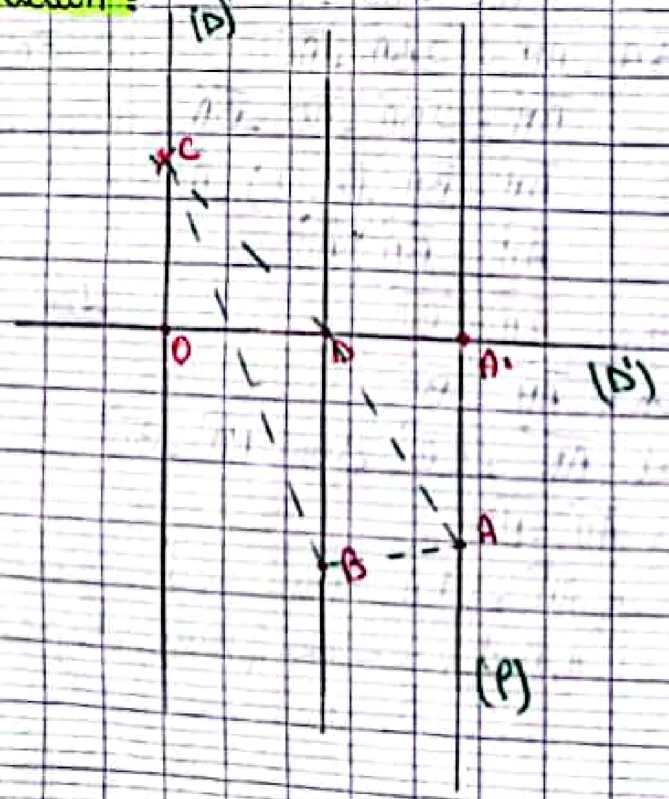
b- Montrer que (P) et (Δ') sont sécantes en un point unique A'

On dit que A' est le projeté du A sur (Δ') en parallèle à (Δ)

2- Montrer que D est le projeté du B sur (Δ') en parallèle à (Δ)

3- Déterminer les projetés des C et D sur (Δ') en parallèle à (Δ)

- Solution :



b. On a (P) // (Δ)

et on a : (Δ) et (D') sont sécantes en un point

donc (P) et (D') sont sécantes en un point A'

2. on a (BD) // (Δ)

et (BD) et (D') sont sécantes en D

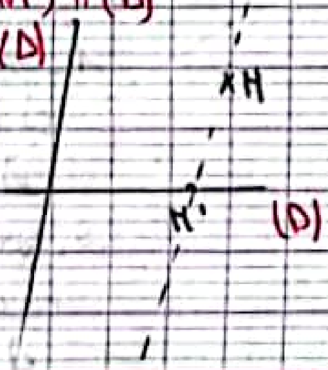
alors D est le projeté du B sur (D') en parallèle à (Δ)

3. on a : O est le projecté du C sur (D') en parallèle à (Δ)

on a : D est le projeté du D sur (D') en parallèle à (Δ)

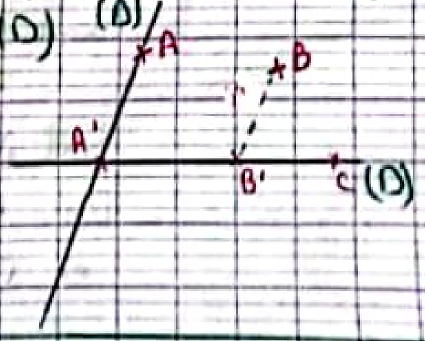
"Définition"

- Soit (Δ) et (D) deux droites sécantes et soient M et M' deux points du plan tels que M' ∈ (D) et (MM') // (Δ)
- Le point M' s'appelle le projeté du M sur la droite (D) parallèlement à (Δ) et on écrit P(M) = M'



Remarque 1

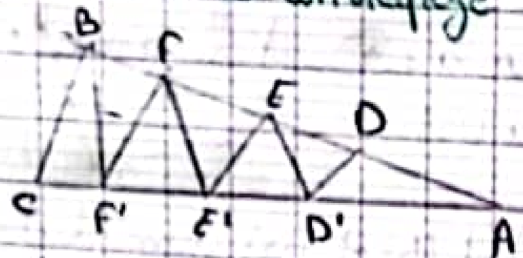
- Si M ∈ (D) alors le projeté du M sur (D) est lui-même on dit que M est un point invariant par la projection
- Exemple : On considère la figure suivante :
  - A' est le projeté du A sur (D) parallèlement à (Δ)
  - B' est le projeté du B sur (D) parallèlement à (Δ)
  - C est le projeté du C sur (D) parallèlement à (Δ)
  - P(A) = A' ; P(B) = B' ; P(C) = C



" Remarques "

→ Si M' est le projeté du point M sur (D) parallèlement à (Δ) alors (MM') // (Δ)

- Application : On considère la figure suivante :
1. Déterminer les projetés des D, E et F sur (AC) parallèlement à (BC)
2. Montrer que (FF') // (EE')
3. Montrer que FDD'F' est un trapèze



" - Solution : "

1. on a le projeté de D sur (AC) parallèlement à (BC) est D'
et on a le projeté de E sur (AC) parallèlement à (BC) est E'
et on a le projeté de F sur (AC) parallèlement à (BC) est F'
2. on a F' le projeté de F sur (AC) parallèlement à (BC)
c-à-d : (FF') // (BC)
et on a E' le projeté de E sur (AC) parallèlement à (BC)
c-à-d : (EE') // (BC)
Alors (EE') // (FF')
3. on a le projet de D sur (AC) parallèlement à (BC) alors
c-à-d (DD') // (BC)
et on a (FF') // (BC)
donc $\boxed{(DD') // (FF')}$ 1

Soit AFF' est un triangle
On a D un point de [AF]
et D' un point de [AF']

donc : $\boxed{FF' > DD'}$ ②

- d'après 1 et 2 donc FDD'F' un trapèz.

2_ La projection orthogonale :

Définition

- Soient (Δ) et (D) deux droites perpendiculaires et soit M et M' deux points du plan tel que M' est le projeté du M sur (Δ) parallèlement à (D).
- On dit que M' est le projeté orthogonal du M sur (Δ).

→ Exemple : ABC est un triangle rectangle en B

✓_ B est le projeté orthogonal du A sur (BC)

✓_ C est le projeté orthogonal du C sur (BC)

- Application : ABCD un rectangle de centre O et P la projection orthogonale sur (BC).

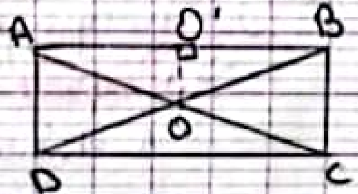
1_ Déterminer P(A) et P(D)

2_ Construire O' le projeté du O sur (AB).

- Solution :

1_ on a : P(A) = B
et P(D) = C

2_

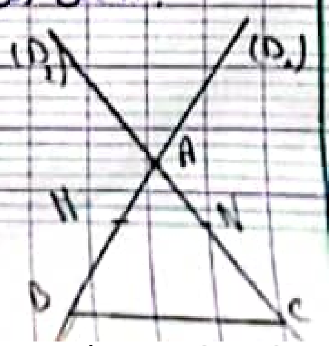


II_ Théorème de Thalès :

1_ Théorème de Thalès direct :

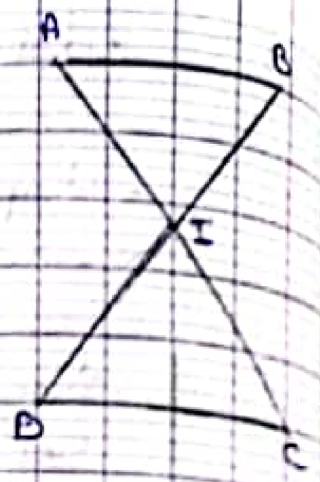
Propriété

- Soient (D_1) et (D_2) deux droites sécantes en A
- Soient B et M deux points de (D_1) distincts de A.
- Soient C et N deux points de (D_2) distincts de A.
- Si (MN) // (BC) alors : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$



"**Application** :"

- $(AB) // (DC)$
- $DI = 54$; $IA = 9$
- $IB = x$; $IC = 45$



"+ Déterminer la valeur de x."

. on a (AC) et (BD) deux droites sécantes en I.
et on a $(AB)//(DC)$
donc d'après Théorème de Thalès
on a : $\frac{IA}{IC} = \frac{IB}{ID} = \frac{AB}{DC}$

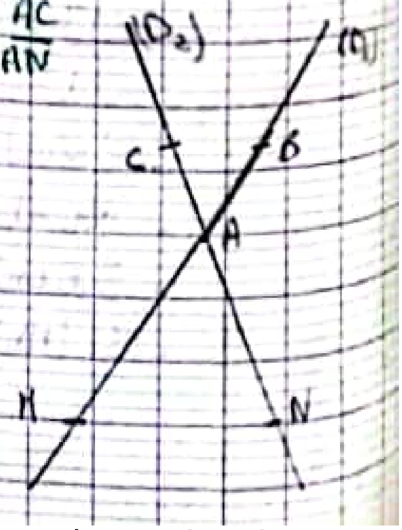
c-a-d : $\frac{9}{45} = \frac{x}{54}$

c-a-d : $x = \frac{9 \times 54}{45}$

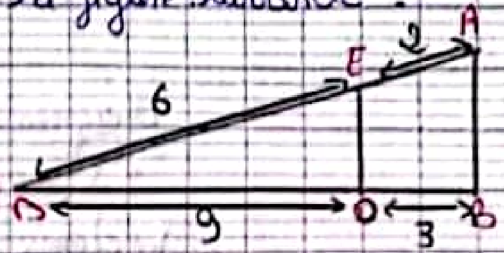
$\boxed{\text{c-a-d : } 10,8}$

"2 - Réciproque du Théorème de thalès :"

"- Propriété" : Soient (D_1) et (D_2) deux droites sécantes en A et Soient B et M deux points de (D_1) distincts de A.
. Soient C et N deux points de (D_2) distincts de A.
Si les points C, A et N et les points B, A et M dans le même ordre et $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$
alors $(CB)//(MN)$



" - Application :" On considère la figure suivante :
Montrer que (EO) // (AB)



" - Solution :'
on a AD... est un triangle
et $E \in [AD]$ et $O \in [BD]$

$\frac{DE}{DA} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$\frac{DO}{DB} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

alors $\frac{DE}{DA} = \frac{DO}{DB}$

. Donc d'après la réciproque de théorème de Thalès
(EO) // (AB).

II _ Conservation de coefficient de colinéaire :

- Activité : ABC un triangle et soit E un point tel que :
$\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AB}$

1- Construire E' le projeté du E sur (AC) parallèlement à BC

2- Montrer que : $\vec{AE'} = \frac{2}{3}\vec{AC}$

" - Solution :

2 Montrons que $\vec{AE'} = \frac{2}{3}\vec{AC}$

. On a : E' le projeté du E sur (AC) parallèlement à (BC)
c-à-d : $E' \in [AC]$
donc, (AE') // (AC) ① et $\vec{AE'}$ et $\vec{AC}$ ont le même sens ②

. et (EE') // (BC)
et puisque $E \in [AB]$

. d'après le Théorème de Thalès on a
$\frac{AE}{AB} = \frac{AE'}{AC}$ c-à-d $AE' = \frac{AE}{AB} \times AC$

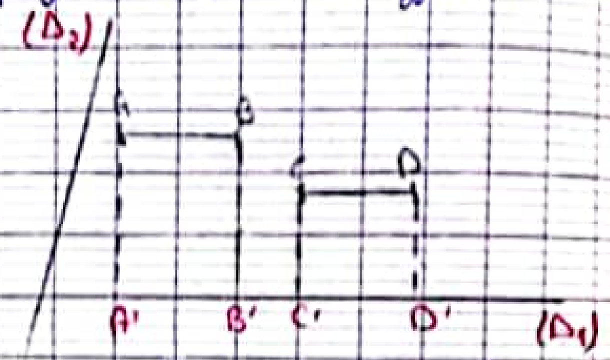
$AE' = \frac{\frac{2}{3}AB}{AB} \times AC$

$AE' = \frac{2}{3} AC$ (3)

Donc d'après 1 et 2 et 3 on déduit que : $\overrightarrow{AE'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Propriété : Soient (D_1) et (D_2) deux droites sécantes.

- Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs colinéaires tel que : $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{CD}$
- Si A', B', C' et D' sont respectivement les projetés des points A, B, C et D sur (D_1) parallèlement à (D_2) alors : $\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{C'D'}$
- On dit que la projection conserve le coefficient de colinéarité

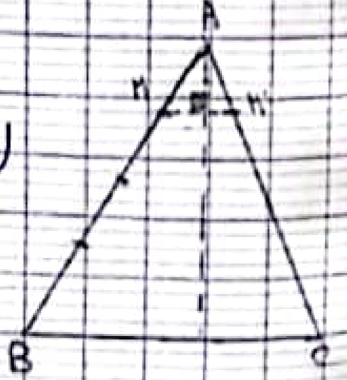


- **Application :** ABC un triangle et H un point tel que $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

1. Construire H' le projeté de H sur (AC) parallèlement (BC)
2. Montrer que $\overrightarrow{AH'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$
3. En déduire que $\overrightarrow{HH'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

- **Solution :**

1. Construire H'



2. on a H' le projeté de H sur (AC) parallèlement à (BC)
et A le projeté de A sur (AC) parallèlement à (BC)
et C le projeté de B sur (AC) parallèlement à (BC).

et puisque $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

donc $\vec{AH} = \frac{1}{4}\vec{AC}$

car la projection conserve le coefficient de colinéarité

3- on a $\vec{AH'} = \frac{1}{4}\vec{AC}$

c-a-d : $\vec{AH} + \vec{HH'} = \frac{1}{4}\vec{AC}$

$\vec{HH'} = \frac{1}{4}\vec{AC} - \vec{AH}$

$\vec{HH'} = \frac{1}{4}\vec{AC} - \frac{1}{4}\vec{AB}$

$\vec{HH'} = \frac{1}{4}(\vec{AC} - \vec{AB})$

$\vec{HH'} = \frac{1}{4}(\vec{AC} + \vec{BA})$

Alors : $\vec{HH'} = \frac{1}{4}\vec{BC}$

Exercice Soit ABC un triangle I et I' deux point du plan tel que $\vec{AI} = \frac{2}{3}\vec{AC}$ et $\vec{AI'} = \frac{2}{3}\vec{AB}$

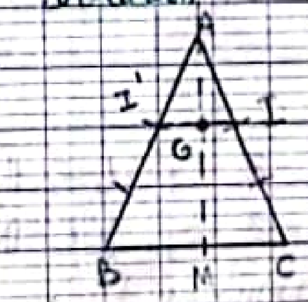
1- construire la figure

2- Montrez que I' est le projeté du I sur (AB) parallèlement à (BC)

3- Soit M le milieu du [BC] et la droite (AM) coup (II') en G. Montrer que $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AM}$

Solution

1-



2- On a $\vec{AI'} = \frac{2}{3}\vec{AB}$

donc $I' \in (AB)$ ①

et $\vec{II'} = \vec{IA} + \vec{AI'}$

$= \vec{AI'} - \vec{AI}$

$= \frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AC}$

$= \frac{2}{3}(\vec{AB} - \vec{AC})$

$= \frac{2}{3}(\vec{CA} + \vec{AB})$

$= \frac{2}{3}\vec{CB}$

Alors $(II') \parallel (BC)$ ②

Donc d'après 1 et 2 :

I' est le projeté de I sur (AB) parallèlement à (BC)

3- Soit P une projection sur (AM) parallèlement à (BC)

On a : $P(A) = A$

$P(I) = G$ car $G \in (II')$

$P(C) = M$

Donc : $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AM}$

car la projection conserve le coefficient de colinéarité