« Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, et $\mathbb{R}$ »

I. Les ensembles des nombres :

« 1- L'ensemble des nombres entiers : »

« Définition : »

- Les nombres entiers naturels forment un ensemble, on note $\mathbb{N}$ et on écrit : $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; ...\}$
- Les nombres entiers relatifs forment un ensemble, on le note $\mathbb{Z}$ et on écrit : $\mathbb{Z} = \{...; -3; -2; -1; 0, 1, 3, 4;$

Remarque 1 :

$\mathbb{N}^*$: L'ensemble des nombres entiers naturels non nuls.
$\mathbb{Z}^*$: L'ensemble des nombres entiers relatifs non nuls.
$\mathbb{Z}^-$: L'ensemble des nombres entiers relatifs négatifs.
$\mathbb{Z}^+$: L'ensemble des nombres entiers relatifs positifs.
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$: on dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ et inclus dans l'ensemble $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$

Exemple ① :

$2 \in \mathbb{N}$; $3 \in \mathbb{Z}$; $-4 \notin \mathbb{N}$; $\{2;3\} \subset$
$-1 \in \mathbb{Z}$; $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$; $\frac{4}{2} \in \mathbb{N}$; $\{-2;1\} \not\subset$

2- L'ensemble des nombres décimaux : »

« Définition : »

- Le nombre décimal et un nombre qui s'écrit sous la forme $\frac{a}{10^n}$ tels que $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$
- Les nombres décimaux forment un ensemble, on le note $\mathbb{D}$ et on écrit : $\mathbb{D} = \{\frac{a}{10^n} / a \in \mathbb{Z}$ / $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}\}$

- Exemple ②:

$\frac{2}{10} \in \mathbb{D}$; $3 \in \mathbb{D}$; $\frac{-3}{2} \in \mathbb{D}$; $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

Remarque 2: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$

3- L'ensemble des nombres rationnels :

- Définition :

- Le nombre est un nombre qui s'écrit sous la forme $\frac{a}{b}$ tels que $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$
- Les nombres rationnels forment un ensemble, on le note $\mathbb{Q}$ et on écrit : $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*\}$

- Exemple ③:

$\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$; $2 \in \mathbb{Q}$; $\frac{-3}{5} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; $\pi \notin \mathbb{Q}$

Remarque 3 :

Les nombres $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ sont les nombres irrationnels

4- L'ensemble des nombres réels :

- Définition :

Les nombres rationnel et les nombres irrationnels forment un ensemble on le note $\mathbb{R}$

Remarque 4 :

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

II - Les opérations dans $\mathbb{R}$:

Propriété 1 :

Soient a, b, c et d des nombres réels on a

- $a + b = a + b$
- $a + (b + c) = (a + b) + c$
- $a - (-b) = a + b$
- $a + (-a) = 0$
- $a \times b = b \times a$
- $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

pour b, c et d non nuls on a :

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + c \times b}{b \times d}$
- $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d - c \times b}{b \times d}$

* $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d}$ * $\dfrac{a}{b} = 0$ c-à-d $a = 0$

* $\dfrac{a}{b} = 1$ c-à-d $a = b$; $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ c-à-d $a \times d = \ldots$

* $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$ * $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{1}{c}$

* $\dfrac{a}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{1} \times \dfrac{d}{c}$

* Application : Calculer

$$A = \frac{\frac{3}{4} - 5}{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} \qquad B = \frac{3 + \frac{2}{3}}{\frac{1}{3} + 5} \qquad C = \frac{1 + \frac{1}{3}}{2 - \frac{3}{4}} - \frac{3}{2}$$

$$D = \frac{\frac{15}{16}}{\frac{3}{22} + \frac{11}{44}}$$

* Solution :

$$A = \frac{\frac{3}{4} - 5}{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3-20}{4}}{\frac{4+3}{6}} = \frac{\frac{-17}{4}}{\frac{7}{6}} = \frac{-17}{4} \times \frac{6}{7} = \frac{-102}{28} = \frac{-51}{14}$$

$$B = \frac{3 + \frac{2}{3}}{\frac{1}{3} + 5} = \frac{\frac{9+2}{3}}{\frac{1+15}{3}} = \frac{11}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{16} = \frac{11}{16}$$

$$C = \frac{1 + \frac{1}{3}}{2 - \frac{3}{4}} - \frac{3}{2} = \frac{\frac{3}{3} + \frac{1}{3}}{\frac{2\times4 - 3\times1}{4\times1}} - \frac{3}{2} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{4}} - \frac{3}{2} = \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} - \frac{3}{2} = \frac{16}{15} - \frac{3}{2} = \frac{32 - 45}{30} = \frac{-13}{30}$$

$$D = \frac{\frac{15}{16}}{\frac{7}{42} + \frac{11}{44}} = \frac{\frac{15}{16}}{\frac{6}{44} + \frac{11}{44}}$$

$$= \frac{15}{16} \times \frac{44}{17}$$

$$= \frac{15}{4\times4} \times \frac{4\times11}{17}$$

$$= \frac{15}{4} \times \frac{11}{17}$$

$$D = \frac{165}{68}$$

"Propriété 2 :"

Soient a, b et c, d des nombres réels :

- $a\times(b+c) = a\times b + a\times c$
- $a\times(b-c) = a\times b - a\times c$
- $(a+b)(c+d) = a\times c + a\times d + b\times c + b\times d$
- $(a-b)(c-d) = a\times c - a\times d - b\times c + b\times d$

"- Application :"

$A = \sqrt{3}(\sqrt{2}x - 5\sqrt{3}y)$; $B = 5x(2x-3) + (x+5)(2x-3)$

"- Solution" :

$A = \sqrt{3}(\sqrt{2}x - 5\sqrt{3}y)$
$= \sqrt{6}x - 5\sqrt{9}y$
$= \sqrt{6}x - 5\times3y$
$\sqrt{6}x - 15y$

$B = 5x(2x-3) + (x+5)(2x-3)$
$= 10x^2 - 15x + 2x^2 - 3x + 10x - 15$
$= 12x^2 - 8x - 15$

III - Les puissances et l'écriture scientifique

1- Puissance d'un nombre réel :

Définition :

✓ Soient a un nombre réel et n un entier naturel non nul on : $a^n = \underbrace{a \times a \times a \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \ldots \times a}_{n \text{ fois}}}$ Si $a \neq 0$

✓ a s'appelle la base et n s'appelle l'exposant.

Cas particuliers : les puissance de 10.

$10^n = \underbrace{100\ldots0}_{n \text{ zéros}}$ et $10^{-n} = \frac{1}{\underbrace{10\ldots0}_{n \text{ zéros}}} = \underbrace{0{,}0\ldots01}_{n \text{ zéros}}$

Propriété 3

Soient a et b deux nombres réels non nuls, et n et m deux relatifs on a :

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

- Application 3 : Soient a et b deux nombres réels tels que : $a^2 = b$ et $b^2 = 2$

Calculer : $A = (a \times b)^2 \times b$ et $B = \frac{1}{a^2} \times \left(\frac{a}{b}\right)^6$

on a $A = (a \times b)^2 \times b$
$= a^2 \times b^2 \times b$
$= b \times 2 \times b$
$= b^2 \times 2$
$= 2 \times 2$
donc $A = 4$

on a $B = \frac{1}{a^2} \times \left(\frac{a}{b}\right)^6$
$= \frac{1}{b} \times \frac{a^6}{b^6}$
$= \frac{1 \times b \times b \times b}{b \times 2 \times 2 \times 2}$
$= \frac{1 \times b^2}{8}$
$= \frac{2}{8}$

Propriété 4 :

Soient a et b deux nombres réels on a :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Exemple 4 :

- $9x^2 - 5y^2 = (3x)^2 - (\sqrt{5}y)^2$
  $= (3x - \sqrt{5}y)(3x + \sqrt{5}y)$
- $x^3 - 1 = x^3 - 1^3$
  $= (x-1)(x^2 + x + 1)$

Application : Soient x, y et z des nombres réels tel que : $x + y + z = 0$ et $xyz = 1$

Calculer : $x^3 + y^3 + z^3$

Solution :

on a : $x + y + z = 0$

c-a-d : $x + y = -z$

c-a-d : $(x+y)^3 = (-z)^3$

c-a-d : $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = -z^3$

c-a-d : $x^3 + y^3 + z^3 = -3x^2y - 3xy^2$

c-a-d : $x^3 + y^3 + z^3 = -3xy(x+y)$

c-a-d : $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ car $x + y = -z$

c-a-d : $x^3 + y^3 + z^3 = 3 \times 1$ car $xyz = 1$

donc : $x^3 + y^3 + z^3 = 3$

2 - L'écriture scientifique d'un nombre décimal :

Définition :

- Tout nombre décimal b peut être sous la forme : $a \times 10^n$ ou $-a \times 10^n$ tel que $1 \leq a < 10$ et $n \in \mathbb{Z}$
- Cette écriture s'appelle l'écriture scientifique de b

Exemple :

- L'écriture scientifique du nombre 0,032 est $3,2 \times 10^{-2}$
- L'écriture scientifique du nombre 321,2 est $3,212 \times 10$

Application : Rempli le tableau suivant :

Le nombre	écriture scientifique
72,1	$7,21 \times 10$
1432	$1,432 \times 10^3$
750	$7,50 \times 10^2$
-0,04087	$-4,087 \times 10^{-2}$

Exercice 1 : Soit x un nombre réel tel que :

$$x \geq 1 \text{ et } x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

1/ Calculer $x + \frac{1}{x}$ et $x - \frac{1}{x}$.

2/ Déduire la valeur de x.

Solution :

1/ $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \times \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2$

$= x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$

$= 7 + 2$

c-à-d $x + \frac{1}{x} = \sqrt{9}$ ou $x + \frac{1}{x} = -\sqrt{9}$ (impossible $x \geq 1$)

c-à-d $x + \frac{1}{x} = 3$

2/ on a $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2x \times \left(\frac{1}{x}\right)^2$

$= x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$

$= 7 - 2$

$= 5$

c-a-d $x - \frac{1}{x} = \sqrt{5}$ ou $x - \frac{1}{x} = -\sqrt{5}$ (impossible car $x \geq 1$)
c-a-d $x - \frac{1}{x} = \sqrt{5}$

2/ on a $\begin{cases} x + \frac{1}{x} = 3 \\ x - \frac{1}{x} = \sqrt{5} \end{cases}$

c-a-d $2x = 3 + \sqrt{5}$
" $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

- Exercice (2) : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :
$A = 10^{n+1} - 10^n$ est divisible par 9.
$B = 5 \times 2^{n+1} - 3 \times 2^n$ est divisible par 7.
$C = \frac{9^n - 4^n}{3^n - 2^n}$ est nombre entier naturel $(n \geq 1)$.

- Solution :
- on a $n \in \mathbb{N}$
donc on a $A = 10^{n+1} - 10^n$
$= 10^n \times 10 - 10^n$
$A = 9 \times 10^n$
Donc A est divisible par 9

donc on a $B = 5 \times 2^{n+1} - 3 \times 2^n$
$= 5 \times 2 \times 2^n - 3 \times 2^n$
$= 2^n (10 - 3)$
$B = 7 \times 2^n$
Donc B est divisible par 7

donc on a $C = \frac{9^n - 4^n}{3^n - 2^n}$
$= \frac{(3^2)^n - (2^2)^n}{3^n - 2^n}$
$= \frac{(3^n)^2 - (2^n)^2}{3^n - 2^n}$
$= \frac{(3^n - 2^n)(3^n + 2^n)}{3^n - 2^n}$
$= 3^n + 2^n \in \mathbb{N}$ car $2^n \in \mathbb{N}$ et $3^n \in \mathbb{N}$
Donc C est un nombre entier naturel