

Ordre et opérations

1- Comparaison de deux nombres réels :

* Règle :

Soient a et b deux nombres réels.

Si $a - b > 0$ alors $a > b$

Si $a - b < 0$ alors $a < b$

Si $a - b = 0$ alors $a = b$

* Application 1: Comparer

$\frac{-1}{2}$ et $\frac{-2}{3}$

$$\text{On a : } \frac{-1}{2} - \frac{-2}{3} = \frac{-1}{2} + \frac{2}{3}$$
$$= \frac{-3+4}{6}$$

$$\text{Alors } \frac{-1}{2} > \frac{-2}{3} = \frac{1}{6} > 0$$

Application 3: Comparer

$7a+1$ et $7a-5$ avec a un nombre réel

$$\text{On a : } (7a+1) - (7a-5)$$
$$= 7a+1-7a+5$$
$$= 6 > 0$$

Donc $7a+1 > 7a-5$

2- ordre et addition - ordre et multiplication :

Règle 4 :

Soient a, b, C des nombres réels

• $a < b$ alors $a + C < b + C$

• $C > 0$:

$a < b$ alors $a \times C < b \times C$

• Si $C < 0$:

$a < b$ alors $a \times C > b \times C$

* Application 1 :

$x < -3, y + 2 < 7, -2z > -8$

trouver les inégalités vérifiées par : $x + 7,$

$x - 1, 7x, -9x, y, z$

* On a : $x < -3$

$x + 7 < -3 + 7$

$x + 7 < 4$

* On a : $x < -3$

$x + (-1) < (-3) + (-1)$

$x - 1 < -4$

* On a : $x < -3$

$x \times 7 < (-3) \times 7$

$7x < -21$

* On a : $x < -3$

$x \times (-9) > (-3) \times (-9)$

$-9x > 27$

* On a : $y + 2 < 7$

$y + 2 + (-2) < 7 + (-2)$

$y < 5$

* On a : $-2 > -8$
 $-2 \times \frac{1}{-2} < -8 \times \frac{1}{-2}$

* Règle 2 : $3 < 4$

a, b, c des nombres réels :

$a < b$
 $c < d$ alors $a + c < b + d$

a, b, c des nombres positifs

$a < b$
 $c < d$ alors $a \times c < b \times d$

3-ordre et carré-ordre et inverse :

* Règle 1 :

a et b des nombres réels

• Si a et b positifs

$a < b$ alors $a^e < b^e$
 $a > b$ alors $\sqrt[a]{a} > \sqrt[b]{b}$

• Si a et b négatifs

$a < b$ alors $a^e > b^e$

* Exemple :

* $x > 3$ alors $x^e > 3^e$
 donc $x^e > 9$

* $y < -1$ alors $y^e < (-1)^e$
 donc $y^e < -1$

* Application 1: Comparer

$\sqrt{17}$ et $3\sqrt{2}$

On a: $(\sqrt{17})^2 = 17$

et $(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$

On a: $17 < 18$

$(\sqrt{17})^2 < (3\sqrt{2})^2$

Donc $\sqrt{17} < 3\sqrt{2}$

* Application 2: Comparer

$-2\sqrt{3}$ et $-2\sqrt{2}$

On a: $(-2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$

et $(-2\sqrt{2})^2 = 4 \times 2 = 8$

On a: $12 > 8$

$(-2\sqrt{3})^2 > (-2\sqrt{2})^2$

Donc $-2\sqrt{3} < -2\sqrt{2}$

* Règle 3:

a et b deux nombres réels non nul :

* Si a et b ont le même signe :

$a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

* Si a et b n'ont pas le même signe :

$a < b$ alors $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

* Exemples:

* $-6 < -3$ alors $\frac{1}{-6} > \frac{1}{-3}$

* $-5 < 3$ alors $\frac{1}{-5} < \frac{1}{3}$

* $\frac{2}{3} < \frac{9}{4}$ alors $\frac{3}{2} > \frac{4}{9}$

* $2 > \frac{11}{3}$ alors $\frac{1}{2} < \frac{3}{11}$

4- Encadrement :

Règle 1 :

- a, b, c, d, x, y des nombres réels
- * $a < x < b$ alors $a+c < x+c < b+c$
 - * Si $c > 0$:
 - $a < x < b$ alors $a \times c < x \times c < b \times c$
 - * Si $c < 0$:
 - $a < x < b$ alors $b \times c < x \times c < a \times c$
 - * $a < x < b$ et $c < y < d$ alors $a+c < x+y < b+d$
 - * a, b, c, d, x, y des réels positifs :
 - * $a < x < b$ et $c < y < d$ alors $a \times c < x \times y < b \times d$

* Application 1 :

$$-5 < x < 2, -1 < y-3 < 2 \text{ et } -4 < -4y < 8$$

Encadrer :

$$x+5, x-1, 5x, -3x, y, 3$$

* Encadrement de $x+5$:

$$\text{On a : } -5 < x < 2$$

$$\text{alors : } (-5)+5 < x+5 < 2+5$$

$$\text{Donc : } 0 < x+5 < 7$$

* Encadrement de $x-1$:

$$\text{On a : } -5 < x < 2$$

$$\text{alors : } (-5)+(-1) < x+(-1) < 2+(-1)$$

$$\text{Donc : } -6 < x-1 < 1$$

* Encadrement de $5x$:

$$\text{On a : } -5 \leq x \leq 2$$

$$\text{alors : } (-5) \times 5 \leq x \times 5 \leq 2 \times 5$$

$$\text{Donc : } -25 \leq 5x \leq 10$$

* Encadrement de $-3x$:

$$\text{On a : } -5 \leq x \leq 2$$

$$\text{alors : } 2 \times (-3) \leq x \times (-3) \leq (-5) \times (-3)$$

$$\text{Donc : } -6 \leq -3x \leq 15$$

* Encadrement de y :

$$\text{On a : } -4 \leq y-3 \leq 2$$

$$\text{alors : } (-1) + 3 \leq y-3+3 \leq 2+3$$

$$\text{Donc : } 2 \leq y \leq 5$$

* Encadrement de z :

$$\text{On a : } -16 \leq -4z \leq 8$$

$$\text{alors : } 8 \times \frac{1}{-4} \leq -4z \times \frac{1}{-4} \leq (-16) \times \frac{1}{-4}$$

$$\text{Donc : } -2 \leq z \leq 4$$

* Remarque :

$$a \leq x \leq b \quad \text{alors} \quad -b \leq -x \leq -a$$

* Application 2 :

$$-3 \leq a \leq 1 \quad \text{et} \quad -6 \leq b \leq 2$$

* Encadrer : $a+b$ et $a-b$

* Encadrons $a+b$:

$$\text{On a : } -3 \leq a \leq 1$$

$$\text{et : } -6 \leq b \leq 2$$

$$\text{Donc : } (-3) + (-6) \leq a+b \leq 1+2$$

$$\text{Alors : } -9 \leq a+b \leq 3$$

* Encadrement a-b :

- $a-b = a + (-b)$

On a : $-6 \leq b \leq 2$

Alors : $-2 \leq -b \leq 6$

On a : $-3 \leq a \leq 1$

et : $-2 \leq -b \leq 6$

Donc : $(-3) + (-2) \leq a + (-b) \leq 1 + 6$

Alors : $-5 \leq a-b \leq 7$

* Application 3 :

$2 \leq c \leq 4$, $-3 \leq d \leq -1$ et $7 \leq h \leq 9$

* Encadrement : Ch et Cd

* Encadrement Ch :

On a : $2 \leq c \leq 4$

et : $7 \leq h \leq 9$

Donc : $2 \times 7 \leq c \times h \leq 4 \times 9$

Alors : $14 \leq ch \leq 36$

* Encadrement Cd :

On a : $-3 \leq d \leq -1$

Alors : $1 \leq -d \leq 3$

On a : $2 \leq c \leq 4$

et : $1 \leq -d \leq 3$

Donc : $2 \times 1 \leq c \times (-d) \leq 4 \times 3$

Alors : $2 \leq -cd \leq 12$

Donc : $-12 \leq cd \leq -2$

* Application 4 :

$-5 \leq x \leq -1$ et $-2 \leq y \leq -1$

* Encadrement : $x + 2x + 5$, $4x - 3$

* Encadrement x, y :

On a: $-5 \leq x \leq -3$

Donc: $3 \leq -x \leq 5$

On a: $-2 \leq y \leq -1$

Donc: $1 \leq -y \leq 2$

On a: $3 \leq -x \leq 5$

et: $1 \leq -y \leq 2$

Donc: $3 \times 1 \leq (-x) \times (-y) \leq 5 \times 2$

Ainsi: $3 \leq xy \leq 10$

* Encadrement $2x + 5$

On a: $-5 \leq x \leq -3$

Donc: $(-5) \times 2 \leq 2x \leq (-3) \times 2$

Ainsi: $-10 \leq 2x \leq -6$

Donc: $(-10) + 5 \leq 2x + 5 \leq (-6) + 5$

Ainsi: $-5 \leq 2x + 5 \leq -1$

* Encadrement $4x - 3y$:

$4x - 3y = 4x + (-3y)$

On a: $-5 \leq x \leq -3$

Donc: $(-5) \times 4 \leq 4x \leq (-3) \times 4$

Ainsi: $-20 \leq 4x \leq -12$

On a: $-2 \leq y \leq -1$

Donc: $(-1) \times (-3) \leq y \times (-3) \leq (-2) \times (-3)$

Ainsi: $3 \leq -3y \leq 6$

On a: $-20 \leq 4x \leq -12$

et: $3 \leq -3y \leq 6$

Donc: $(-20) + 3 \leq 4x + (-3y) \leq (-12) + 6$

Ainsi: $-17 \leq 4x - 3y \leq -6$

* Application 5:

$-4 \leq t \leq 6$ et $1 \leq \frac{-3t+4}{4} \leq 4$

* Encadrement: $\frac{-5t+4}{2}$ et $t \leq 4$

$$\text{on a } -4 \leq r \leq 6$$

$$6 \times (-5) \leq r \times (-5) \leq (-4) \times (-5)$$

$$-30 \leq -5r \leq 20$$

$$-26 \leq 5r + 4 \leq 24$$

$$(-26) \times \frac{1}{5} \leq (5r + 4) \times \frac{1}{5} \leq 24 \times \frac{1}{5}$$

$$-4.3 \leq \frac{-5r + 4}{5} \leq 4.8$$

Encadrons t

$$\text{On a } 1 \leq -3t + 1 \leq 4$$

$$1 \times 7 \leq -3t + 1 \times 7 \leq 4 \times 7$$

$$7 \leq -3t \leq 27$$

$$7 \leq 3t + 1 \leq 28$$

$$27 \times \frac{1}{-3} \leq -3t \times \frac{1}{-3} \leq 6 \times \frac{1}{-3}$$

$$-9 \leq t \leq -2$$

Règle 2

a et $b \in \mathbb{C}$ des nombres réels

Si a et b sont positifs

$a \leq x \leq b$ alors $a^e \leq x^e \leq b^e$

a et b sont négatifs

$a \leq x \leq b$ alors $b^e \leq x^e \leq a^e$

Exemple

* Règle 3 :

a et b, x sont des nombres réels non nuls
Si a et b ont le même signe
 $a \ll x \ll b$ alors $\frac{1}{b} \ll \frac{1}{x} \ll \frac{1}{a}$

* Exemple :

$$5 \ll n \ll 7 \quad \text{alors} \quad \frac{1}{7} \ll \frac{1}{n} \ll \frac{1}{5}$$

$$-6 \ll m \ll -2 \quad \text{alors} \quad \frac{-1}{2} \ll \frac{1}{m} \ll \frac{-1}{6}$$

$$\frac{2}{3} \ll c \ll \frac{8}{5} \quad \text{alors} \quad \frac{5}{8} \ll \frac{1}{c} \ll \frac{3}{2}$$

* Application 1 : $-2 \ll x \ll -1$ et $6 \ll y \ll 8$

Encadrons : $\frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x} = y \times \frac{1}{x}$$

$$\text{On a } -2 \ll x \ll -1$$

$$\text{Alors } -1 \ll \frac{1}{x} \ll \frac{-1}{2}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2} \ll \frac{1}{x} \ll \frac{1}{4}$$

$$\text{On a } 6 \ll y \ll 8$$
$$\text{et } \frac{1}{2} \ll \frac{1}{x} \ll \frac{1}{4}$$

$$\text{Donc } 6 \times \frac{1}{2} \ll y \times \frac{1}{x} \ll 8 \times \frac{1}{4}$$

$$\text{Alors } 3 \ll \frac{y}{x} \ll 2$$

$$\text{Donc } -2 \ll \frac{y}{x} \ll -3$$

Application 2: $-12 \leq a \leq -6$ et $1 \leq b \leq 3$

Encadrer $\frac{a}{b}$

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

On a $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{b} \leq 1$ $1 \leq b \leq 3$

Donc $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{b} \leq 1$

On a $-12 \leq a \leq -6$

Alors $6 \leq -a \leq 12$

et $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{b} \leq 1$

Donc $6 \times \frac{1}{3} \leq (-a) \times \frac{1}{b} \leq 12 \times 1$

Alors $2 \leq \frac{-a}{b} \leq 12$

Donc $-12 \leq \frac{a}{b} \leq -2$

Exercice 1:

- 1- Comparer $\sqrt{13}$ et $2\sqrt{3}$ puis déduire une comparaison pour $-\sqrt{13} + 20$ et $-2\sqrt{3} + 20$
- 2- Soient a, b, c trois nombres réels tel que:
 $1 \leq a \leq 8, -6 \leq b \leq -4, -2 \leq \frac{-3c+5}{c} \leq 10$
- Encadrer $a+b, a-b$ et c

* Solution:

1- On a $(\sqrt{13})^2 = 13$

et $(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$

On a $13 > 12$

Donc $(\sqrt{13})^2 > (2\sqrt{3})^2$

Alors $\sqrt{13} > 2\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \text{On a } \sqrt{13} &> 2\sqrt{3} \\ \text{Donc } \sqrt{13} &< -2\sqrt{3} \\ \text{Alors } -\sqrt{13} + 2 &< -2\sqrt{3} + 2 \end{aligned}$$

2- Encadrement $a+b$:

$$\begin{aligned} \text{On a } 1 &< a < 2 \\ \text{et } -6 &< b < -4 \\ \text{Donc } 1 + (-6) &< a+b < 2 + (-4) \\ \text{Alors } -5 &< a+b < -2 \end{aligned}$$

* Encadrement $a-b$:

$$\begin{aligned} \text{On a } -6 &< b < -4 \\ \text{Alors } 4 &< -b < 6 \\ \text{On a } 1 &< a < 2 \\ \text{et } 4 &< -b < 6 \\ \text{Donc } 1 \times 4 &< a \times (-b) < 2 \times 6 \\ \text{Alors } 4 &< -ab < 12 \\ \text{Donc } -12 &< ab < -4 \end{aligned}$$

* Encadrement $a-b$:

$$\begin{aligned} a-b &= a + (-b) \\ \text{On a } 1 &< a < 2 \\ \text{et } 4 &< -b < 6 \\ \text{Alors } 1+4 &< a + (-b) < 2+6 \\ \text{Donc } 5 &< a-b < 8 \end{aligned}$$

* Encadrement c :

$$\begin{aligned} \text{On a } -2 &< -3c + 5 < 10 \\ (-2) \times 2 &< \frac{-3c + 5}{2} < 10 \times 2 \\ -4 &< -3c + 5 < 20 \\ (-4) + (-5) &< -3c + 5 + (-5) < 20 + (-5) \\ -9 &< -3c < 15 \\ \frac{-9}{-3} \times \frac{1}{-3} &< \frac{-3c}{-3} \times \frac{1}{-3} < \frac{-9}{-3} \times \frac{1}{-3} \\ -5 &< c < 3 \end{aligned}$$

* Exercice 2 :

1- x et y deux nombres réels tel que : $-9 < x < -6$
 et $1 < y < 3$

Encadrer : $x + y$, $y - x$, $\frac{x}{y}$ et y^2

2- t un nombre réels tel que : $4 - 1 < t < 7 - 2$

Encadrer : $-5t + 1$

3- Comparer $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ puis déduire la valeur de $\sqrt{15}$

* Solution :

1- Encadrons $x + y$:

On a $-9 < x < -6$

et $1 < y < 3$

Donc $(-9) + 1 < x + y < (-6) + 3$

alors $-8 < x + y < -3$

* Encadrons $y - x$:

On a $y - x = y + (-x)$

On a $-9 < x < -6$

Alors $6 < -x < 6$

On a $1 < y < 3$

et $0 < -x < 9$

Alors $1 + 6 < y + (-x) < 3 + 9$

Donc $7 < y - x < 12$

* Encadrons $\frac{x}{y}$:

On a $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$

On a $1 < y < 3$

Alors $\frac{1}{3} < \frac{1}{y} < 1$

On a $0 < -x < 9$

et $\frac{1}{3} < \frac{1}{y} < 1$

Donc $0 < \frac{1}{3} < (-x) \cdot \frac{1}{y} < 9 < 1$

Alors $2 < \frac{-x}{y} < 9$

Donc $-9 < \frac{x}{y} < -2$

* Encadrement y^e :

On a $1 < y < 3$

Donc $-1 < \frac{1}{y} < \frac{1}{3}$

Alors $-1 < y^e < \frac{1}{3}$

2- On a $-1 < t < 7$

$7 \times (-5) < t \times (-5) < (-1) \times (-5)$

$-35 < -5t < 5$

$(-35) + 1 < -5t + 1 < 5 + 1$

$-34 < -5t + 1 < 6$

$(-34) \times \frac{1}{5} < (-5t + 1) \times \frac{1}{5} < 6 \times \frac{1}{5}$

$-\frac{34}{5} < \frac{-5t + 1}{5} < \frac{6}{5}$

3- On a $(\sqrt{3})^2 = 3$

et $(\sqrt{5})^2 = 5$

On a $3 < 5$

Donc $(\sqrt{3})^2 < (\sqrt{5})^2$

Alors $\sqrt{3} < \sqrt{5}$

* On a $\sqrt{3} - \sqrt{5} < 0$ car $\sqrt{3} < \sqrt{5}$

$\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$

* Exercice 3 :

1- Comparer $-5\sqrt{3}$ et $-\sqrt{46}$

2- Réc C deux nombres réels tel que : $-5 < C < -3$ et

$7 < \frac{1}{C} < 9$

Encadrement : C- et RC

3- \exists un nombre réel tel que: $-8 \leq d \leq -7$
 Encadrer: $\frac{-1}{2d+5}$

1* Solution:
 $\text{On a } (-5\sqrt{3})^2 = 25 \times 3 = 75$
 et $(-\sqrt{46})^2 = 46$

$\text{On a } 75 > 46$
 Donc $(-5\sqrt{3})^2 > (-\sqrt{46})^2$
 Alors $-5\sqrt{3} < -\sqrt{46}$

2 Encadrons C-R

$\text{On a } C-R = C + (-R)$

$\text{On a } 7 \leq R \leq 9$

Donc $-9 \leq -R \leq -7$

$\text{On a } -5 \leq C \leq -3$

et $-9 \leq -R \leq -7$

Donc $(-9) + (-9) \leq C + (-R) \leq (-3) + (-7)$

Alors $-18 \leq C-R \leq -10$

Encadrons R-C

$\text{On a } -5 \leq C \leq -3$

Alors $3 \leq -C \leq 5$

$\text{On a } 7 \leq R \leq 9$

et $3 \leq -C \leq 5$

Donc $3 \times 7 \leq R + (-C) \leq 9 \times 5$

Alors $21 \leq R-C \leq 45$

Donc $-45 \leq R-C \leq -21$

3- $\text{On a } -8 \leq d \leq -7$

$(-8) \times 2 \leq d \times 2 \leq (-7) \times 2$

$-16 \leq 2d \leq -14$

$(-16) + 5 \leq 2d + 5 \leq (-14) + 5$

$$\begin{aligned} -14 &< 2\sqrt{5} < -9 \\ \frac{-1}{9} &< \frac{1}{2\sqrt{5}} < \frac{-1}{11} \\ \frac{1}{11} &< \frac{-1}{2\sqrt{5}} < \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Exercice 4 :

1- Comparez $5\sqrt{8}$ et $4\sqrt{3}$ puis déduire une comparaison pour $\sqrt{5\sqrt{8}+7}$ et $\sqrt{4\sqrt{3}+7}$

2- a et b deux nombres réels tel que $-3 < a < -2$ et $1 < b < 4$

Encadrer : $2a+3$, a^2 , b^2 et $a^2 - b^2$

3- Soit C un nombre réel tel que : $3 < 5C-2 < 8$ Montrez que $1 < C < 2$

4- On a $(5\sqrt{8})^2 = 25 \times 8 = 50$
et $(4\sqrt{3})^2 = 16 \times 3 = 48$

On a $50 > 48$

Donc $(5\sqrt{8})^2 > (4\sqrt{3})^2$

Alors $5\sqrt{8} > 4\sqrt{3}$

* On a $5\sqrt{8} > 4\sqrt{3}$

Alors $5\sqrt{8}+7 > 4\sqrt{3}+7$

Donc $\sqrt{5\sqrt{8}+7} > \sqrt{4\sqrt{3}+7}$

2- Encadrons $2a+3$:

On a $-3 < a < -2$

$(-3) \times 2 < a \times 2 < (-2) \times 2$

$-6 < 2a < -4$

$(-6)+3 < 2a+3 < (-4)+3$

$-3 < 2a+3 < -1$

* Encadrons a^2 :

$$\text{On a } -3 \sqrt{a} \sqrt{-2}$$

$$\text{Donc } (-2)^2 \sqrt{a^2} \sqrt{(-3)^2}$$

$$\text{Alors } 4 \sqrt{a^2} \sqrt{9}$$

* Encadrement b^2 :

$$\text{On a } 1 \sqrt{b} \sqrt{4}$$

$$\text{Donc } 1^2 \sqrt{b^2} \sqrt{4^2}$$

$$\text{Alors } 1 \sqrt{b^2} \sqrt{16}$$

* Encadrement $a^2 - b^2$:

$$\text{On a } a^2 - b^2 = a^2 + (-b^2)$$

$$\text{On a } 1 \sqrt{b^2} \sqrt{16}$$

$$\text{Donc } -16 \sqrt{-b^2} \sqrt{-4}$$

$$\text{On a } 4 \sqrt{a^2} \sqrt{9}$$

$$\text{et } -16 \sqrt{-b^2} \sqrt{-4}$$

$$\text{Donc } 4 + (-16) \sqrt{a^2 + (-b^2)} \sqrt{9 + (-4)}$$

$$\text{Alors } -12 \sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{8}$$

$$3- \text{On a } 3 \sqrt{50-2} \sqrt{8}$$

$$3+2 \sqrt{50-2+2} \sqrt{8+2}$$

$$5 \sqrt{50} \sqrt{10}$$

$$\cancel{5} \times \frac{1}{\cancel{5}} \sqrt{\cancel{5}0} \times \frac{1}{\cancel{5}} \sqrt{10 \times \frac{1}{\cancel{5}}}$$

$$1 \sqrt{0} \sqrt{2}$$