Puissances

5-11-2024

1- Définitions et propriétés :

Soient a un nombre rationnel et n un nombre entier naturel.

Le produit $\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$ est appelé la puissance de a d'ordre n.

on peut le réduire sous forme a^n.

a est appelé : la base

n est appelé : l'exposant.

Exemple :

$$\left(\frac{-5}{3}\right)^2 = \frac{-5}{3} \times \frac{-5}{3} = \frac{25}{9}.$$

$$\left(\frac{-3}{-4}\right)^3 = \frac{-3}{-4} \times \frac{-3}{-4} \times \frac{-3}{-4} = \frac{-27}{-64}$$

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^5 = \frac{-1}{2} \times \frac{-1}{2} \times \frac{-1}{2} \times \frac{-1}{2} \times \frac{-1}{2} = \frac{-1}{32}$$

Cas particuliers : a un nombre rationnel, n entier naturel.

$a^1 = a$

$1^n = 1$

$0^n = 0 \quad ; n \neq 0$

$a^0 = 1 \quad ; a \neq 0.$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & ; n \text{ pair} \\ -1 & ; n \text{ impair} \end{cases}$$

Exemple :

$$\left(-\frac{2}{173}\right)^0 = 1$$

$$(-1)^{2025} = -1$$

$1^{1307} = 1$

$(-1)^{181} = 1$

$\left(\frac{-4}{7}\right)^1 = \frac{-4}{7}$.

Remarque:

0^0 est une écriture sans sens.

Règle :

Soient a un nombre rationnel et n un entier naturel
- Si n est pair, alors a^n positif.
- Si n est impair, alors le signe de a^n est le signe de la base.

Exemples:

$\left(\frac{-3}{7}\right)^{20}$ est positif car l'exposant 20 est pair

$\left(\frac{5}{-7}\right)^{123}$ est négatif car l'exposant 123 est impair et la base $\frac{5}{-7}$ est négatif.

$\left(\frac{-15}{-19}\right)^{57}$ est positif car l'exposant 57 est impair et la base $\frac{-11}{-19}$ est positive.

$\left(\frac{-2}{9}\right)^{2024}$ est positif car l'exposant 2024 est pair.

2_ Puissances à exposant négatif

Soient a un nombre rationnel et n un entier naturel $(a \neq 0)$ l'inverse de a^n est $\frac{1}{a^n}$; on va le noter par a^{-n}

Donc: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Exemples:

$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{4 \times 4} = \frac{1}{16}$

$(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)} = \frac{1}{81}$.

$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2\times2\times2} = \frac{1}{8}$.

Règle :

a et b deux nombres rationnels non nul.

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$.

Exemples :

$\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{2} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$

$\left(\frac{2}{-5}\right)^{-3} = \left(\frac{-5}{2}\right)^{3} = \frac{-5}{2} \times \frac{-5}{2} \times \frac{-5}{2} = \frac{-125}{8}$.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 2^5 = 2\times2\times2\times2\times2 = 32$.

cas particuliers :

$a \neq 0$ Donc : $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Exemples.

$5^{-1} = \frac{1}{5}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$.

$7^{-1} = \frac{1}{7}$

$\left(\frac{-10}{7}\right)^{-1} = \frac{7}{-10}$.

3. Puissances de 10 :

Règle :

n un entier naturel.

$10^n = \underbrace{1000\ldots0}_{n \text{ zéros}}$

$10^{-n} = \underbrace{0,0\ldots0}_{n \text{ zéros}}1$

Exemples:

$10^{5} = 100000.$

$10^{-2} = 0,01.$

$10^{-8} = 0,00000001.$

$10^{3} = 1000.$

$10^{-6} = 0,000001.$

4- Opérations sur les puissances:

Règle:

> a et b deux nombres rationnels m et n deux entiers relatifs.
>
> - $a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$
> - $\dfrac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n}$; $(a \neq 0)$
> - $a^{m} \times b^{m} = (a \times b)^{m}.$
> - $\dfrac{a^{n}}{b^{n}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{n}$; $b \neq 0.$
> - $(a^{m})^{n} = a^{m \times n}$

Exemples.

- $(-5)^{3} \times (-5)^{-2} = (-5)^{3+(-2)} = (-5)^{1} = -5.$
- $\dfrac{360^{-3}}{36^{-3}} = \left(\dfrac{360}{36}\right)^{-3} = 10^{-3} = 0,001.$
- $\left[\left(\dfrac{-3}{2}\right)^{2}\right]^{-1} = \left(\dfrac{-3}{2}\right)^{2 \times (-1)} = \left(\dfrac{-3}{2}\right)^{-2} = \left(\dfrac{2}{-3}\right)^{2}$

  $= \dfrac{2}{-3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}.$
- $\dfrac{7^{-5}}{7^{-7}} = 7^{(-5)-(-7)} = 7^{2} = 7 \times 7 = 49.$
- $0,25^{2024} \times 4^{2024} = (0,25 \times 4)^{2024} = 1^{2024} = 1.$

5- L'écriture scientifique

Soit x un nombre décimal. L'écriture scientifique de x s'écrit sous forme : $x = a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$ et n un nombre entier relatif. et $-x = -a \times 10^n$.

Exemple :

$0{,}0000069 = 6{,}9 \times 10^{-6}$.

$2147{,}5 = 2{,}1475 \times 10^{3}$.

$0{,}00125 = 1{,}25 \times 10^{-3}$

$912{,}45 = 9{,}1245 \times 10^{2}$.

$-0{,}0000000978 = -9{,}78 \times 10^{-8}$.

$-2024 = -2{,}024 \times 10^{3}$.

Ex 1 p 86 :

$\left(\frac{-4}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{-3}{4}\right)^{3} = \frac{-3}{4} \times \frac{-3}{4} \times \frac{-3}{4} = -\frac{27}{64}$

$\left(\frac{7}{-19}\right)^{-2} = \left(\frac{-19}{7}\right)^{-2} = \frac{19}{7} \times \frac{19}{7} = \frac{361}{49}$

$\left(\frac{1}{25}\right)^{2} = \frac{1}{25} \times \frac{1}{25} = \frac{1}{625}$

$0^{2019} = 0$

$\left(\frac{2020}{2021}\right)^{0} = 1$

$(-1)^{2016} = 1$.

Ex 2 p 86 :

$\left(\frac{-3}{17}\right)^{2019}$ est négatif car l'exposant 2019 impair et la base $\frac{-3}{17}$ est négatif.

$(-0{,}0034)^{2018}$ est positif car l'exposant 2018 est pair.

$\left(\frac{7}{3}\right)^{33}$ est positif car l'exposant 33 est impair et la base $\frac{7}{3}$ est positive.

$(-5)^{2n+1}$ est négatif car l'exposant $2n+1$ est impair et la base -5 est négatif.

Exercice 3 :

1) calculer les puissances suivantes :

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16.$

$\left(\frac{-1}{3}\right)^3 = \frac{-1}{3} \times \frac{-1}{3} \times \frac{-1}{3} = \frac{-1}{27}.$

$\left(\frac{-5}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{-5}\right)^2 = \frac{2}{-5} \times \frac{2}{-5} = \frac{4}{25}$

$\left(\frac{-4291}{23}\right)^0 = 1.$

$\left(\frac{4}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{4}.$

$10^{-4} = 0{,}0001.$

$10^8 = 100000000.$

2) Réduire les expressions suivantes.

$A = a^{-9} \times a^2.$

$= a^{(-9)+2}.$

$= a^{-7}.$

$B = 8^{-4} \times 7^{-4}.$

$= (8 \times 7)^{-4}.$

$= 56^{-4}.$

$C = \left[\left(\frac{-11}{5}\right)^3\right]^{-4}$

$= \left(\frac{-11}{5}\right)^{3 \times (-4)}.$

$= \left(\frac{-11}{5}\right)^{-12}.$

$D = \frac{x^{-3}}{x^{-11}}$

$= x^{(-3)-(-11)}.$

$= x^{8}.$

3) Trouver l'écriture scientifique des nombres :

$-1479,25 = -1,47925 \times 10^{3}.$

$0,00007258 = 7,258 \times 10^{-5}.$

Exercice 4 : Ecrire sous forme d'une puissance de 10 l'expression :

$$K = \frac{(10^{2})^{3} \times 0,001^{-4}}{0,01} = \frac{10^{2 \times 3} \times (10^{-3})^{-4}}{10^{-2}}$$

$$= \frac{10^{6} \times 10^{(-3)\times(-4)}}{10^{-2}}$$

$$= \frac{10^{6} \times 10^{12}}{10^{-2}}$$

$$= \frac{10^{6+12}}{10^{-2}}$$

$$= \frac{10^{18}}{10^{-2}}$$

$$= 10^{18-(-2)}$$

$$= 10^{20}.$$

Exercice 5 : Trouver l'écriture scientifique du nombre

$$H = \frac{(11 \times 10^{-4})^{2}}{5 \times 10^{6}} = \frac{11^{2} \times (10^{-4})^{2}}{5 \times 10^{6}}.$$

$$= \frac{121 \times 10^{-8}}{5 \times 10^{6}} = \frac{121}{5} \times \frac{10^{-8}}{10^{6}}.$$

$$= 24,2 \times 10^{(-8)-6}.$$

$$= 24,2 \times 10^{-14}.$$

$$= 2,42 \times 10^{1} \times 10^{-14}$$

$$= 2,42 \times 10^{1+(-14)}$$

$$= 2,42 \times 10^{-13}.$$