L'ordre dans $\mathbb{R}$:

I- Ordre et opérations :

1/ Ordre :

Activitée 1 :

1/ Comparer $3\sqrt{3}$ et $1+3\sqrt{2}$

2/ Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

a/ M. que : $\sqrt{x^2+1}-x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

b/ comparer : $\dfrac{1}{2x}$ et $\sqrt{x^2+1}-x$

- Solution :

1/ Comparons : $3\sqrt{3}$ et $1+3\sqrt{2}$

on a $(3\sqrt{3})^2 = 27$

et on a $(1+3\sqrt{2})^2 = 1+2\cdot 3\sqrt{2}+(3\sqrt{2})^2 = 1+6\sqrt{2}+18 = 19+6\sqrt{2}$

donc $(3\sqrt{3})^2-(1+3\sqrt{2})^2 = 27-19-6\sqrt{2} = 8-6\sqrt{2}$

et on a $8^2-(6\sqrt{2})^2 = 64-72 = -8$

c-a-d $8 < 6\sqrt{2}$ c-a-d $8-6\sqrt{2} < 0$

$(3\sqrt{3})^2-(1+3\sqrt{2})^2 < 0$

$3\sqrt{3} < 1+3\sqrt{2}$

2/ a/ on a :
$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}$$
$$= \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{(\sqrt{x^2+1})^2-x^2}$$
$$= \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x^2+1-x^2}$$
$$= \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{1}$$
$$= \sqrt{x^2+1}-x$$

b/ on a comparons : $\dfrac{1}{2x}$ et $\sqrt{x^2+1}-x$

$$\left(\sqrt{x^2+1}-x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$$

Soit : $x \in \mathbb{R}^{*+}$

on a : $x^2+1 > x^2$

c-a-d : $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2}$

c-a-d : $\sqrt{x^2+1} > x$

c-a-d : $\sqrt{x^2+1}+x > x+x$

c-a-d : $\sqrt{x^2+1}+x > 2x$

c-a-d : $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} < \dfrac{1}{2x}$

c-a-d : $\sqrt{x^2+1}-x < \dfrac{1}{2x}$

Définition

✓ Soient a et b deux nombres réels on a :

- $a \leq b$ si et seulement si $(a-b) \leq 0$
- $a < b$ si et seulement si $(a-b) < 0$
- $a \geq b$ si et seulement si $(a-b) \geq 0$
- $a > b$ si et seulement si $(a-b) > 0$

Propriété 1

Soient a, b, c et d des nombres réels :

* Si $a \leq b$ alors $a+c \leq b+c$
* Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a+c \leq b+d$
* Si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $a \times c \leq b \times c$
* Si $a \leq b$ et $c < 0$ alors $a \times c \geq b \times c$
* Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $a \times c \leq b \times d$
* Si $0 \leq a \leq b$ alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$
* Si $0 \leq a \leq b$ alors $a^2 \leq b^2$
* Si $a \leq b \leq 0$ alors $a^2 \geq b^2$
* Si a et b ont même signe et $a \leq b$ alors $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b}$ $(a \neq 0$ et $b \neq 0)$.

I- Exemple 1 :

- $a < \frac{5}{7}$ et $b \leq \frac{9}{7}$ alors $a+b < 2$
- $x < 10$ et $-2 < 0$ alors $-2x > -20$
- $0 \leq x < 2$ alors $\sqrt{x} < \sqrt{2}$
- $x < -2$ alors $x^2 > (-2)^2$
- $x \geq 3$ alors $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$

Application 1 :

1/ Comparer $\sqrt{4n^2+1}$ et $2n+1$ tel que $n \in \mathbb{N}$

2/ Soient x et y des réels tels que $x \leq y \leq 3$.

a- M.q : $x+y-6 \leq 0$

b- Comparer x^2-6x+1 et y^2-6y+1

Solution 1 :

1/ on a $(\sqrt{4n^2+1})^2 = 4n^2+1$

et $(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1$

$\sqrt{4n^2+1}-(2n+1)^2 = \cancel{4n^2}+\cancel{1}-\cancel{4n^2}-4n-\cancel{1} = -4n$

Puisque $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$

c-a-d $-4n \leq 0$

donc $\sqrt{4n^2+1} \leq 2n+1$

2/ a/ on a : $x \leq y \leq 3$

alors : $x \leq 3$ et $y \leq 3$

donc : $x+y \leq 3+3$

donc : $x+y-6 \leq 0$

b/ on a : $(x^2-6x+1)-(y^2-6y+1) = x^2-6x-y^2+6y$

$= (x-y)(x+y)-6(x-y)$

$= (x-y)(x+y-6)$

et on a : $\begin{cases} x+y-6 \leq 0 \\ x \leq y \end{cases}$

c-a-d : $\begin{cases} x+y-6 \leq 0 \\ x-y \leq 0 \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

c-a-d $(x-y)(x+y-6) \geq 0$

c-a-d $x^2-6x+1 \geq y^2-6y+1$

$x \leq y \leq 3$ alors $x-3 \leq y-3 \leq 0$

alors $(x-3)^2 \geq (y-3)^2$

alors $x^2-6x+9 \geq y^2-6y+9$

alors $x^2-6x+1 \geq y^2-6y+1$

2°/Encadrement :

Définition

> Soient a et b et x des réels tels que $a < b$
> chaque double inégalité parmi ces doubles inégalités suivants : $a \leq x \leq b$; $a \leq x < b$;
> $a < x \leq b$; $a < x < b$ est appellée
> encadrement de x d'amplitude $b-a$

Exemples 2 :

$3{,}13 \leq \pi \leq 3{,}15$ est un encadrement du π

d'amplitude $3{,}15 - 3{,}13 = 0{,}02$

Propriétés :

Soient a, b et c, d, x et y des nombres réels on a :

- Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ alors $a+c \leq x+y \leq b+d$
- Si $0 < a \leq x \leq b$ et $0 \leq c \leq y \leq d$ alors $a \times c \leq x \times y \leq b \times d$
- Si $a \leq x \leq b < 0$ et $c \leq y \leq d < 0$ alors $b \times d \leq x y \leq a \times c$
- Si $0 < a \leq x \leq b$ alors $a^2 \leq x^2 \leq b^2$
- Si $a < x \leq b < 0$ alors $b^2 \leq x \leq a^2$
- a et b ont même signe Si $a \leq x \leq b$ $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$

Application 2 : On considère les réels x, y et z tels que :

$2 \leq x \leq 4$; $-3 \leq y \leq 1$ et $-1{,}5 \leq z \leq -0{,}5$

- Trouver un encadrement des nombres suivants :

« $x-y$; $x \times y$; $x^2+y^2+z^2$; $\frac{x+2}{3}$ ».

Réponse :

* Encadrement du $x-y$:

- on a $2 \leq x \leq 4$ et $-3 \leq y \leq 1$

- c-a-d $2 \leq x \leq 4$ et $-1 \leq -y \leq 3$

- c-a-d $2-1 \leq x+(-y) \leq 4+3$

donc $1 \leq x-y \leq 7$

* Encadrement du $x \times y$:

on a : $-3 \leq y \leq 1$ et $2 \leq x \leq 4$

- Si : $-3 \leq y \leq 0$ et $2 \leq x \leq 4$

c-a-d : $0 \leq -y \leq 3$ et $2 \leq x \leq 4$

c-a-d : $0 \leq x \times (-y) \leq 12$

c-a-d : $-12 \leq -xy \leq 0$

c-a-d : $0 \leq x \times y \leq 12$ (1)

- Si $0 \leq y \leq 1$ et $2 \leq x \leq 4$

c-a-d : $0 \leq x \times y \leq 4$ (2)

De 1 et 2 on déduit que : $0 \leq x \times y \leq 12$.

* Encadrement du $x^2+y^2+z^2$

on a : $2 \leq x \leq 4$ c-a-d $4 \leq x^2 \leq 16$ (1)

et on a : $-3 \leq y \leq 1$ c-a-d $-3 \leq y \leq 0$ ou $0 \leq y \leq 1$

c-a-d $0 \leq y^2 \leq 9$ ou $0 \leq y^2 \leq 1$

c-a-d $0 \leq y^2 \leq 9$ (2)

et on a : $-1,5 \leq z \leq -0,5$ c-a-d $0,25 \leq z^2 \leq 2,25$

de 1, 2, 3 on déduit que $4,25 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 27,$

* Encadrement du $\frac{x+2}{z}$

on a : $2 \leq x \leq 4$ et $-1,5 \leq z \leq -0,5$

c-a-d : $2+2 \leq x+2 \leq 4+2$

et : $\frac{-1}{0,5} \leq \frac{1}{z} \leq \frac{-1}{1,5}$

$$\frac{1}{1,5} \leq \frac{-1}{y} \leq \frac{1}{0,5}$$

donc : $4 \times \frac{1}{1,5} \leq (x+2) \times \frac{(-1)}{3} \leq 6 \times \frac{1}{0,5}$

c-a-d : $\frac{4}{1,5} \leq \frac{-(x+2)}{3} \leq \frac{6}{0,5}$

c-a-d : $\frac{-6}{0,5} \leq \frac{x+2}{3} \leq \frac{-4}{1,5}$

II- Les intervalle dans $\mathbb{R}$:

1 Intervalle bornés et non bornés

- Définition 3 :

Soient a et b deux réels tel que $a < b$.
On définit les différents intervalles de $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

• **Intervalles bornés** : le tableau suivant résume les quatres types d'intervalles bornés.

Intervalle	Inégalité	Représentation graphique
$[a;b]$ intervalle fermé	$a \leq x \leq b$	$[$ a … x … b $]$
$]a;b[$ intervalle ouvert	$a < x < b$	$]$ a … x … b $[$
$]a;b]$ Intervalle semi-ouvert (ouverte en a)	$a < x \leq b$	$]$ a … x … b $]$
$[a,b[$ Intervalle semi-ouvert (ouvert en b)	$a \leq x < b$	$[$ a … b $[$

• **Intervalles non bornés** : le tableau suivant résume les quatre types d'intervalles suivantes.

Intervalle	inégalité	Représentation graphique
$[a;+\infty[$	$a \leq x$	$[$ a .... $+\infty$
$]a;+\infty[$	$a < x$	$]$ a .... $+\infty$
$]-\infty;b]$	$x \leq b$	$-\infty$ .... $]$ b
$]-\infty;b[$	$x < b$	$-\infty$ .... $[$ b

- Remarque 1 :

* $+\infty$ (plus l'infini) et $-\infty$ (moins l'infini) sont des symboles.
* Le crochet «] » au voisinage de ∞ est toujours ouve
* $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$; $\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$; $\mathbb{R}^- =]-\infty;0]$
  $\mathbb{R}^*_+ =]0;+\infty[$; $\mathbb{R}^*_- =]-\infty;0[$.
* L'ensemble vide ne contient aucun élément, il se note $\emptyset$.

- Exemples :

* On a : $2 \leq x \leq 4$ c-à-d : $x \in [2;4]$
* On a : $-3 < x \leq 4$ c-à-d : $x \in]-3;4]$
* On a : $x < 3$ c-à-d : $x \in]-\infty;3]$
* On a : $-1 < x$ c-à-d : $x \in]-1;+\infty[$

2°/ Intersection et réunion de deux intervalles :

Définition 4

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$

* L'intersection des intervalles I et J est l'ensemble des nombres réels appartient à I et appartient J et se note $I \cap J$ ($\cap$ se lit inter)

* La réunion des intervalle I et J est l'ensemble des nombres reels appartient à I ou appartient à J et se note $I \cup J$ ($\cup$ se lit union).

→ Autrement dit : $I \cap J = \{x \in \mathbb{R} / x \in I \text{ et } x \in J\}$

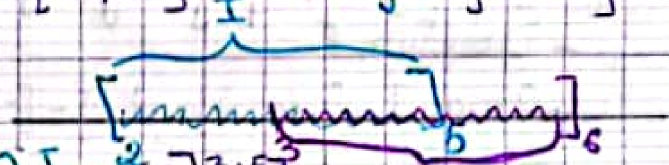
$I \cup J = \{x \in \mathbb{R} / x \in I \text{ ou } x \in J\}$

*** Exemple :**

✓ Déterminer l'intersection de I et J tels que :

$I = [2;5]$ et $J =]3;6]$

On a :

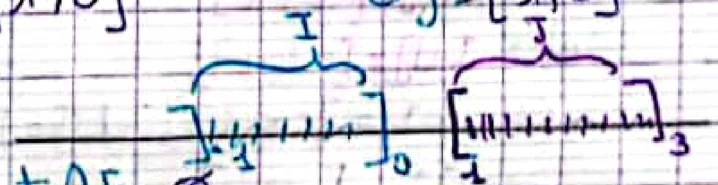


Donc : $I \cap J =]3;5]$

✓ Déterminer l'intersection des I et J tels que :

$I =]-1;0]$ et $J = [1;3]$

On a :

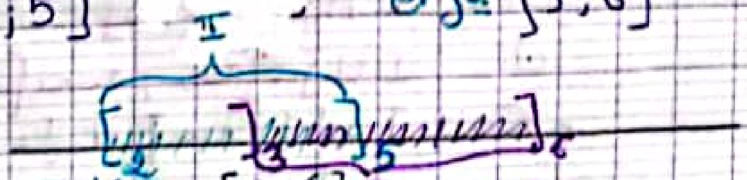


Donc : $I \cap J = \emptyset$

✓ Déterminer la réunion des I et J tels que :

$I = [2;5]$ et $J =]3;6]$

On a :

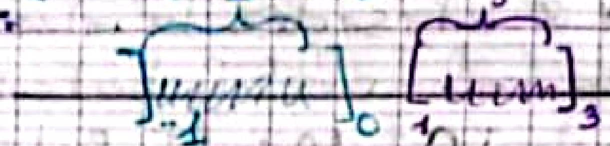


Donc : $I \cup J = [2;6]$

* Déterminons la réunion des I et J tels que :

$I =]-1;0]$ et $J = [1;3]$

On a :



Donc : $I \cup J =]-1;0] \cup [1;3]$.

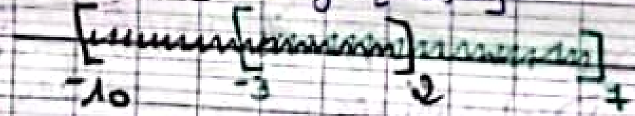
* Application :

Déterminer l'intersection et la réunion des I et J dans les cas suivantes :

* $I = [-10;2]$ et $J = [-3;7]$
* $I =]-\infty;3]$ et $J = [-6;+\infty[$
* $I = [7;+\infty[$ et $J = [-5;+\infty[$
* $I = [-\frac{2}{7};\frac{3}{5}]$ et $J = [\frac{5}{7};1]$.
* $I =]-\infty;\frac{-5}{7}]$ et $J =]\frac{-4}{3};+\infty[$.

* Solution :

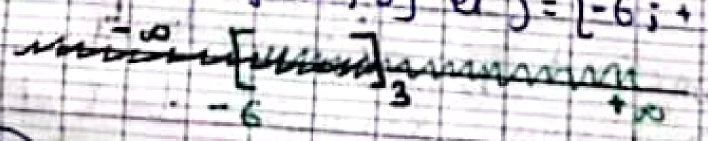
→ On a $I = [-10;2]$ et $J = [-3;7]$



Donc $I \cap J = [-3;2]$

et : $I \cup J = [-10;7]$

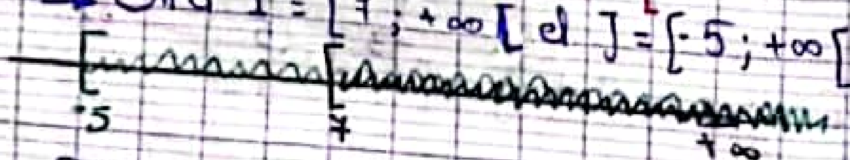
→ On a : $I =]-\infty;3]$ et $J = [-6;+\infty[$



Donc $I \cap J = [-6;3]$

et $I \cup J =]-\infty;+\infty[$

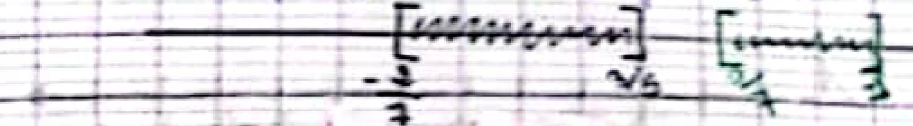
→ On a $I = [7;+\infty[$ et $J = [-5;+\infty[$



Donc $I \cap J = [7;+\infty[$

et $I \cup J = [-5;+\infty[$.

→ $I = \left[-\frac{2}{7} ; \frac{3}{5}\right]$ et $J = \left[\frac{3}{4} ; 1\right]$



Donc $I \cap J = \emptyset$

et $I \cup J = \left[-\frac{2}{7} ; \frac{3}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{4} ; 1\right]$

→ On a $I = \left]-\infty ; -\frac{5}{4}\right]$ et $J = \left]-\frac{4}{3} ; +\infty\right[$

Donc $I \cap J = \left]-\frac{4}{3} ; -\frac{5}{4}\right]$

et $I \cup J = \left]-\infty ; +\infty\right[$

Definitions

Soit $I = [a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ on a :

- L'amplitude de I est le nombre réel $b-a$.
- Centre de I est le nombre réel $\frac{a+b}{2}$
- Rayon de I est le nombre réel $\frac{b-a}{2}$

Exemple : On considere l'intervalle

$$I = [-1;3]$$

L'amplitude de I est : $3-(-1) = 4$

Le centre de I est : $\frac{3+(-1)}{2} = 2$

Le rayon de I est : $\frac{3-(-1)}{2} = 2$

I - La valeur absolue :

- Activitée :

1/ Placer sur une droite graduée les points suivants :

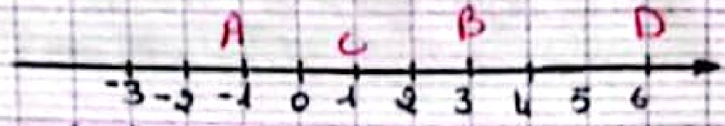
$A(-1)$; $B(3)$; $C(1)$ et $D(5)$

2/ Déterminer les distances suivantes

AB ; AC , BC , et AD

Solution :

1)



2) **Calculons les distances**

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
$= \sqrt{(3+1)^2 + 0}$
$= \sqrt{16}$
$AB = 4$

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$
$= \sqrt{(1-(-1))^2 + 0}$
$= \sqrt{4}$
$AC = 2$

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$
$= \sqrt{(1-3)^2 + 0}$
$= \sqrt{4}$
$BC = 2$

$AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$
$= \sqrt{(5+1)^2 + 0}$
$= \sqrt{36}$
$AD = 6$

Définition

- Soit x un réel et M un point de la droite graduée d'origine O.
La valeur absolue de x et la distance OM et se note $|x|$ telque : $|x| = OM$

Remarque :

* $|x| = x$ si $x \geqslant 0$
* $|x| = -x$ si $x \leqslant 0$
* $|x| \geqslant 0$
* $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$
* $|x^2| = |x|^2 = x^2$

Exemple :

* $|2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$ car $2-\sqrt{3} > 0$
* $|\sqrt{5}-3| = -(\sqrt{5}-3)$ car $\sqrt{5}-3 < 0$
* $|x-1| = x-1$ si $x > 1$ et $|x-1| = -x+1$ si $x < 1$

Propriété : Soient a et b deux réels
* A et B deux points de la droite graduée d'abscisse a et b respectivement on a :

$$AB = |a-b| = |b-a|$$

Propriété : Soient $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

* $|x| = |-x|$
* $|x-y| = |y-x|$
* $\sqrt{x^2} = |x|$
* $|x \times y| = |x| \times |y|$
* $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ avec $y \neq 0$
* $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

$|x| = a$ c-à-d : $x = a$ ou $x = -a$ (avec $a \geqslant 0$)

$|x| = |y|$ c-à-d : $x = y$ ou $x = -y$

Exemples :

$|4+(-3)| = |1| = 1$ et $|4| + |-3| = 4+3 = 7$

donc $|4+(-3)| \leqslant |4| + |-3|$

* **Application :** Résoudre les équations suivantes

* $|x-3|=2$ * $|2x-1|=|3x+4|$
* $|x+4|=1$ * $|x+5|+|-2x+1|=0$
* $|4-3x|=5$ * $|x+3|=-2$

* **Solution :**

* On a : $|x-3|=2$

c-a-d : $x-3=2$ ou $x-3=-2$

c-a-d : $x=2+3$ ou $x=-2+3$

c-a-d : $x=5$ ou $x=1$

Donc : $S=\{1;5\}$

* On a $|x+4|=1$

c-a-d : $x+4=1$ ou $x+4=-1$

c-a-d : $x=-3$ ou $x=-5$

Donc : $S=\{-5;-3\}$

* On a $|2x-1|=|3x+4|$

c-a-d : $2x-1=3x+4$ ou $2x-1=-(3x+4)$

c-a-d : $2x-3x=4+1$ ou $2x-1=-3x-4$

c-a-d : $-x=5$ ou $2x+3x=-4+1$

c-a-d : $x=-5$ ou $5x=-3$

c-a-d : $x=-5$ ou $x=\frac{-3}{5}$

Donc : $S=\{-5;-\frac{3}{5}\}$

* On a $|x+5|+|-2x+1|=0$

c-a-d : $x+5=0$ et $-2x+1=0$

c-a-d : $x=-5$ et $x=\frac{1}{2}$

et puisque : $-5\neq\frac{1}{2}$

Donc $S=\emptyset$

* On a $|4-3x|=5$

c-a-d $4-3x=5$ ou $4-3x=-5$

c-a-d $-3x=5-4$ ou $-3x=-5-4$

c-a-d $-3x=1$ ou $-3x=-9$

Scanné avec CamScanner

c-a-d $x = \frac{1}{3}$ ou $x = \frac{-9}{-3}$

c-a-d $x = \frac{1}{3}$ ou $x = 3$

Donc $S = \left\{ \frac{1}{3} ; 3 \right\}$

* On a $|x + 3| = -2$

et puisque $-2 < 0$

Donc $|x + 3| = -2$

Donc n'admet pas une solution.

" Propriété "

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^*_+$

* $|x| \leq r$ si et seulement si $-r \leq x \leq r$ (c-a-d $x \in [-r ; r]$)
* $|x| \geq r$ si et seulement si $x \leq -r$ ou $x \geq r$ (c-a-d $x \in]-\infty ; -r] \cup [r ; +\infty[$)
- $r_1 \leq |x| \leq r_2$ si et seulement si $r_1 \leq x \leq r_2$ ou $r_1 \leq -x \leq r_2$ [...]

→ Exemple :

* On a $|x - 2| \leq \frac{3}{4}$ s.q : $-\frac{3}{4} \leq x - 2 \leq \frac{3}{4}$

s.q : $-\frac{3}{4} + 2 \leq x \leq \frac{3}{4} + 2$

s.q : $\frac{5}{4} \leq x \leq \frac{11}{4}$

s.q : $x \in \left[\frac{5}{4} ; \frac{11}{4} \right]$

* On a $|2x - 1| > 3$ s.q : $2x - 1 > 3$ ou $2x - 1 < -3$

s.q : $2x > 4$ ou $2x < -2$

s.q : $x > 2$ ou $x < -1$

donc : $x \in]-\infty ; -1[\cup]2 ; +\infty[$

" IV - Approximations - Approximations décimales : "

" 1 - Approximation par excès - Approximation par défaut : "

Définition :

Soit α un réel tel que $a \leq \alpha \leq b$ ou $a \leq \alpha < b$ ou $a < \alpha \leq b$ ou $a < x < b$

- Le réel a est appelé approximation par défaut de α à $(b-a)$ près.
- Le réel b est appelé approximation par excès de α à $(b-a)$ près.

→ **Exemple** : On a : $1{,}732 \leq \sqrt{3} \leq 1{,}733$ donc :
$1{,}733$ est une approximation par excès de à 10^{-3} près $(1{,}733 - 1{,}732 = 10^{-3})$
et $1{,}732$ est une approximation par défaut de $\sqrt{3}$ à 10^{-3} près

2/ Valeur approchée :

Définition

Soient x, a et r trois réels, et r positif.
Si $|x-a| \leq r$ ou $|x-a| < r$; on dit que a est une valeur approchée de α à r près.

→ **Exemple** : On a $|\sqrt{2} - 1{,}41| \leq 0{,}01$
donc $1{,}41$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à $0{,}01$ près.

Remarque : Si $a \leq \alpha \leq b$ on a :

- $\frac{a+b}{2}$ est une valeur approchée de α à $\frac{b-a}{2}$ près
- Tout nombre réel dans $[a;b]$ est une valeur approchée de α à $(b-a)$ près.

→ **Exemple** : On a $2{,}236 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}237$
donc $\frac{2{,}236 + 2{,}237}{2} = 2{,}2365$ est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à $\frac{2{,}237 - 2{,}236}{2} = 5$

3/ Approximation décimale :

Définition

Soient $x \in \mathbb{R}$ et p un entier relatif alors il existe un entier relatif N tel que $N \times 10^{-p} \leq x < (N+1) \times 10^{-p}$

- $N \times 10^{-p}$ est dite approximation décimale par défaut de x à 10^{-p}
- $(N+1) \times 10^{-p}$ est dite approximation décimale par excès de x à 10^{-p}

→ **Exemple :** On a : $1,414 \leq \sqrt{2} \leq 1,415$

$1414 \times 10^{-3} \leq \sqrt{2} \leq 1415 \times 10^{-3}$

c-à-d $1414 \times 10^{-3} \leq \sqrt{2} \leq (1414+1) \times 10^{-3}$

- 1414×10^{-3} est une approximation décimale par défaut de $\sqrt{2}$ à 10^{-3}
- $(1414+1) \times 10^{-3}$ est une approximation décimale par excès de $\sqrt{2}$ à 10^{-3}