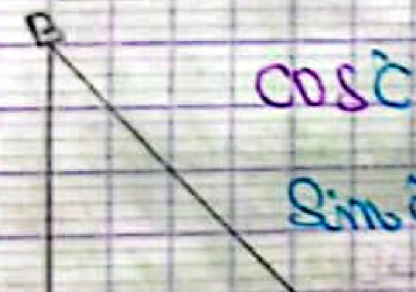
Calcul trigonométrique

1- Les rapports trigonométrique : d'un angle aigu dans un triangle rectangle

1- Définition :

* Dans un triangle rectangle on définit :
- Le cosinus d'un angle aigu est le quotient de la longeur du coté adjacent de cette angle sur la longeur de l'hypoténuse on le note par cos
- Le Sinus d'un angle aigu est le quotient de la longeur du côté opposé à cette angle sur la longeur de l'hypoténuse on le note par Sin
- tangente d'un angle aigu est le quotient de la longeur du Coté opposé de cette angle sur la longeur du Coté adjacent à cette on le note par tg ou tan

* **Autrement dit :**



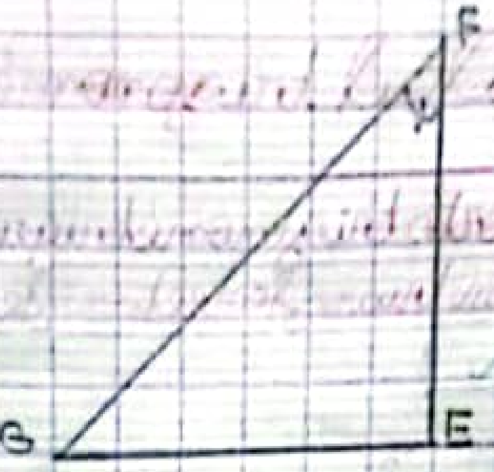
$$\cos \hat{C} = \frac{\text{coté adjacent}}{\text{l'hypoténuse}}$$

$$\sin \hat{C} = \frac{\text{coté opposé a } \hat{C}}{\text{l'hypoténuse}}$$

$$\tan \hat{C} = \frac{\text{coté opposé a } \hat{C}}{\text{coté adjacent a } \hat{C}}$$

* **Exemple :**

EF = 8cm, EG = 6cm, FG = 10cm



$\cos \hat{F} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$\sin \hat{F} = \frac{EG}{FG} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$\tan \hat{F} = \frac{EG}{EF} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

* **Remarque :**

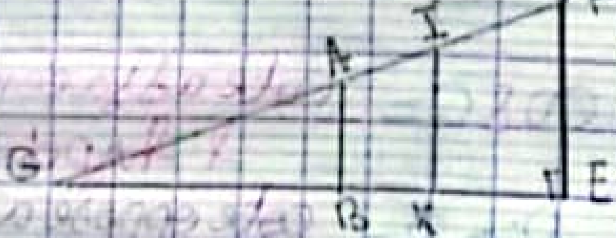
1- Si x est la mesure d'un angle aigu $(0 < x < 90°)$

$0 < \cos x < 1$

$0 < \sin x < 1$

$\tan x$

2-



$\cos \hat{G} = \frac{GB}{GA} = \frac{GK}{GI} = \frac{GE}{GF}$

$\sin \hat{G} = \frac{AB}{GA} = \frac{IK}{GI} = \frac{FE}{GF}$

$\tan \hat{G} = \frac{AB}{GB} = \frac{IK}{GK} = \frac{FE}{GE}$

C'est-à-dire que les valeurs des rapports trigonométrique sont indépendants du triangle rectangle.

* **Exercice 1 :**

IJK un triangle rectangle en I tel que : IJ = 6cm et $\tan \hat{J} = \frac{4}{3}$

1- Montrer que IK = 8cm

2- En appliquant le théorème de pythagore Calculer JK

* **Solution :**

1- On a IJK est un triangle rectangle en I

Donc $\tan \hat{J} = \frac{IK}{IJ}$

et on a $\tan \hat{J} = \frac{4}{3}$

Donc $\frac{IK}{IJ} = \frac{4}{3}$

Alors $IK = \frac{4 \times IJ}{3}$

A.N : $IK = \frac{4 \times 6}{3}$

Donc IK = 8 cm

* **Exercice 2 :**

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que :

AB = 4 et AC = 3

1- Montrer que BC = 5

2- Calculer les rapports trigonométrique de $A\hat{C}B$

3- H le projeté orthogonale de A sur (BC)

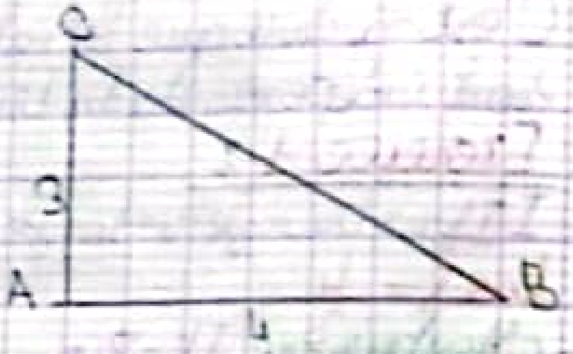
a- Calculer AH

b- En appliquant le théorème de pythagore Calculer BH

4- Soit K un point du plan tel que : AK = 2 et CK = $\sqrt{5}$

a- Montrer que : ACK est triangle rectangle en K

* **Solution :**



1- On a ABC est un triangle rectangle en A
Alors d'après le théorème de phythagore on a :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$
$$BC^2 = 3^2 + 4^2$$
$$BC^2 = 9 + 16$$
$$BC^2 = 25$$
Donc $= \sqrt{25}$
Alors $BC = 5$

2- $\cos \hat{C} = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{5}$
$\sin \hat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$
$\tan \hat{C} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{3}$

3- On a AHC est un triangle rectangle en H
Donc $\sin \hat{C} = \frac{AH}{AC}$
et on a $\sin \hat{C} = \frac{4}{5}$

Donc $\frac{AH}{AC} = \frac{4}{5}$

Alors $AH = \frac{4 \times AC}{5}$
$AH = \frac{4 \times 3}{5}$

Donc $AH = 2{,}4$

b- On a AHB est triangle rectangle en H
Alors d'après le théorèmes de phythagore on a :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$
$$BH^2 = AB^2 + AH^2$$
$$BH^2 = 4^2 - 2{,}4^2$$
$$BH^2 = 16 - 5{,}76$$
$$BH^2 = 10{,}24$$

Alors $BH = \sqrt{10{,}24}$

$BH = 3{,}2$

4- On a $AC^2 = 3^2 = 9$
et $AC^2 = AK^2 + CK^2$
Alors d'après le théorème de phythagore on a : ACK est triangle rectangle en K

Exercice 3 :

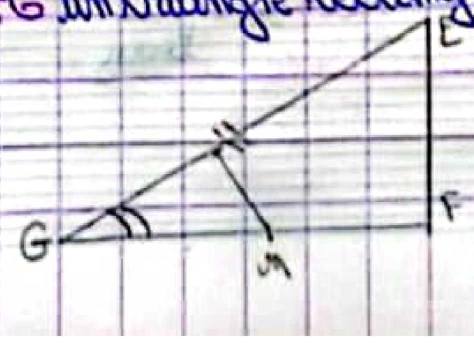
Soit EFG un triangle tel que $EF = 6cm$, $FG = 8cm$ et $EG = 10cm$

1- Montrer que EFG est un triangle rectangle :
2- Calculer les rapports trigonométrique de l'angle $\hat{G}$
3- Soit $M \in [FG]$ tel que $GM = 4cm$ H le projeté orthogonal M sur (EG)
a- Calculer GH

Solution :

1- On a $EG^2 = 10^2 = 100$
et on a $EF^2 + FG^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$
Donc $EG^2 = EF^2 + FG^2$
Alors d'après la réciproque du théorèmes de thales on a EFG un triangle rectangle en F

2



$$\cos\hat{G} = \frac{GF}{GE} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\sin\hat{G} = \frac{EF}{EG} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\tan\hat{G} = \frac{EF}{FG} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

3- On a GHM est un triangle rectangle en H

Donc $\cos\hat{G} = \frac{GH}{GM}$

et on a $\cos\hat{G} = \frac{4}{5}$

Donc $\frac{GH}{GM} = \frac{4}{5}$

Alors $GH = \frac{4 \times GM}{5}$

A.N $GH = \frac{4 \times 4}{5}$

Donc $GH = 3,2\ cm$

2- Relations entre les rapports trigonométriques :

1- Propriété 1 :

Soit x et y les mesures de deux angles complémentaires ($x + y = 90°$) Alors :

$\cos x = \sin y$, $\sin x = \cos y$

$$\tan x = \frac{1}{\tan y}$$

* **Propriété 2 :**

Soit x la mesure d'un angle aigu $(0° < x < 90°)$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

* **Application 1 :**

- Soit x la mesure d'un angle aigu tel que :

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

1 Calculer $\cos x$ et $\tan x$:

* Calculons $\cos x$:

On a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}$$

$$\cos^2 x = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$$

Donc $\cos^2 x = \sqrt{\frac{1}{4}}$

Alors $\cos x = \frac{1}{2}$

* Calculons $\tan x$:

On a $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Scanné avec CamScanner

$$\tan x = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{1}$$

Donc $\tan x = \sqrt{3}$

* **Application 2 :**

– Soit x la mesure d'un angle aigu tel que :
$\tan x = \frac{\sqrt{5}}{2}$

1 Calculer $\cos x$ et $\sin x$:

* Calculons $\cos x$:

On a $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Donc $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{5}{4}$

$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{4+5}{4} = \frac{9}{4}$

$\cos^2 x = \frac{4}{9}$

$\cos x = \sqrt{\frac{4}{9}}$

$\cos x = \frac{2}{3}$

* Calculons $\sin x$:

On a $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Donc $\sin x = \tan x \times \cos x$

$\sin x = \frac{\sqrt{5}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{3}$

Alors $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

* **Exercice 4 :**

Calculer les expressions : $A = 4\cos^2 25° + 3\sin^2 18° + 3\sin^2 72° + 4\cos^2 65°$

$= 4\cos^2 25° + 4\cos^2 65° + 3\sin^2 18° + 3\sin^2 72°$

$= 4(\cos^2 25° + \cos^2 65°) + 3(\sin^2 18° + \sin^2 72°)$

$= 4(\sin^2 65° + \cos^2 65°) + 3(\cos^2 72° + \sin^2 72°)$

$= 4 \times 1 + 3 \times 1$

$= 4 + 3$

$= 7$

$B = 6\cos^2 63° + \cos 10° + 6\cos^2 27° + \sin 80°$

$= 6\cos^2 63° + 6\cos^2 27° - \cos 10° + \sin 80°$

$= 6(\cos^2 63° + \cos^2 27°) - \cos 10° + \sin 80°$

$= 6(\cos^2 63 + \sin^2 63) - \cancel{\cos 10°} + \cancel{\sin 80°}$

$= 6 \times 1$

$= 6$

$C = 8\cos^2 28° - \cos^2 17° + 8\cos^2 62° + \sin^2 73°$

$= 8\cos^2 28° + 8\cos^2 62° - \cos^2 17° + \sin^2 73°$

$= 8(\cos^2 28° + \cos^2 62°) - \cos^2 17° + \cancel{\sin^2 73°}$

$= 8(\sin^2 62° + \cos^2 62°) - \cancel{\sin^2 73°} + \cancel{\sin^2 73°}$

$= 8 \times 1$

$= 8$

$D = \tan 55° \times \tan 35° - 2\sin^2 70° - 2\sin^2 20°$

$= \tan 55° \times \tan 35° - 2(\sin^2 70° + 2\sin^2 20°)$

$= \frac{1}{\cancel{\tan 35}} \times \cancel{\tan 35°} - 2(\sin^2 70° + 2\sin^2 20°$

$= 1 - 2 \times 1 = 1 - 2 = -1$

* Exercice 5 :

Soit x la mesure d'un angle telque $\sin x = \frac{1}{2}$

1- Calculer $\cos x$ et $\tan x$:

2- Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 3$ et $AC = 4\,cm$

a- Montrer que $BC = 5\,cm$

b- Calculer $\cos \hat{C}$ et $\sin \hat{C}$

C- Soit D un point au plan tel que $AD = 2\,cm$ et et $BD = \sqrt{5}\,cm$

a- prouve que ABD est triangle rectangle en D

3- Calculer l'expression

$\cos^2 25° + 2\sin^2 28° + \sin^2 65° + 2\sin^2 62°$

* Solution :

1- Calculons $\cos x$:

On a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\cos^2 x = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\cos^2 x = 1 - \frac{1}{4}$

$\cos^2 x = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$

Donc $\cos x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

* Calculer $\tan x$:

On a $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\tan x = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}$

$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Scanné avec CamScanner

2- On a ABC est un triangle rectangle en A
Alors d'après le théorème de pythagore on a

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$
$$BC^2 = 4^2 + 3^2$$
$$BC^2 = 16 + 9$$
$$BC^2 = 25$$

Donc $BC = \sqrt{25} = 5\,cm$

b- $\cos\hat{C} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$

$\sin\hat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$

c- On a $AB^2 = 3^2 = 9$
et $AD^2 + BD^2 = 2^2 + (\sqrt{5})^2 = 4 + 5 = 9$
Donc $AB^2 = AD^2 + BD^2$
Alors d'après la réciproque du théorème de pythagore
on a ABD est un triangle rectangle en D

3- $M = \cos^2 25° + 2\sin^2 28° - \sin^2 65° + 2\sin^2 62°$
$= \cos^2 25° - \sin^2 65° + 2\sin^2 28° + 2\sin^2 62°$
$= \cos^2 25 - \sin^2 65 + 2(\sin^2 28 + \sin^2 62°)$
$= \cancel{\sin^2 65°} - \cancel{\sin^2 65} + 2(\cos^2 62° + \sin^2 62°)$
$= 2 \times 1 = 2$

3- tableau des rapport trigonométrique d'un angle particulier :

x	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini