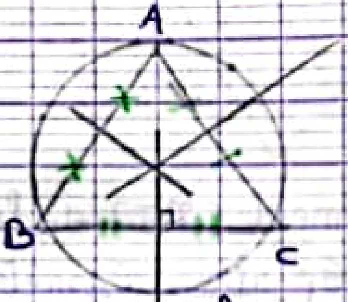
Droites remarquables dans un triangle

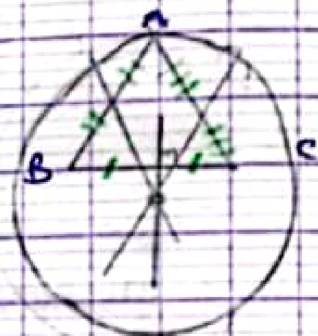
1- Les médiatrice d'un triangle.

Propriété 1:

Les médiatrices d'un triangle ABC sont concourantes en un point O appelé le centre du cercle circonscrit au triangle.

Il ya deux configurations.





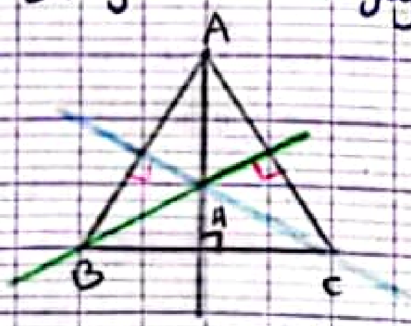
O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

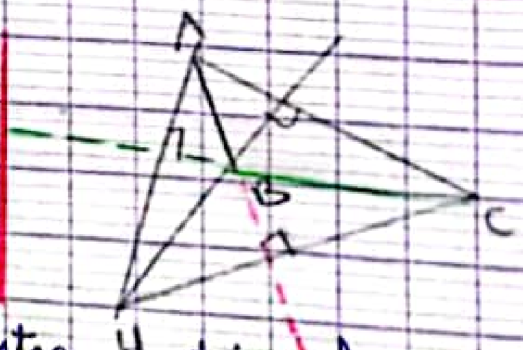
2- La hauteurs d'un triangle

Propriété 2:

Les hauteurs d'un triangle ABC sont concourantes en un point H appelé l'orthocentre du triangle ABC.

Il ya deux configurations.

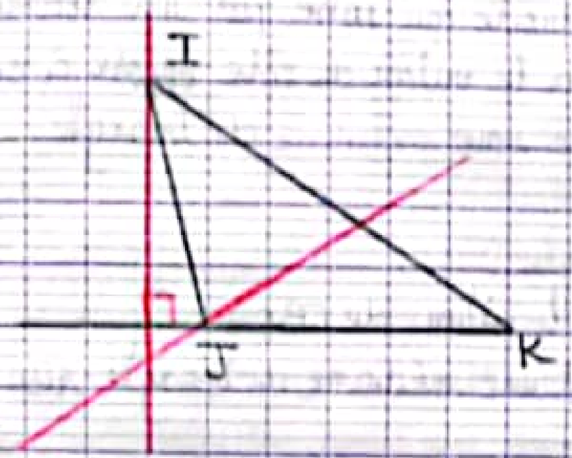




H est le Hortocentre du triangle ABC.

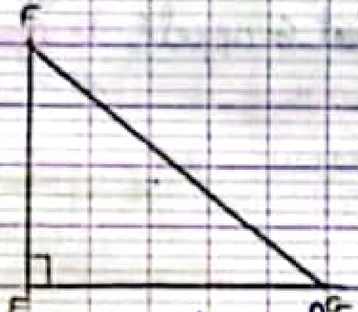
cas particuliers:

1)



L'orthocentre d'un triangle qui a un angle obtus est situé à l'extérieur du triangle.

2)

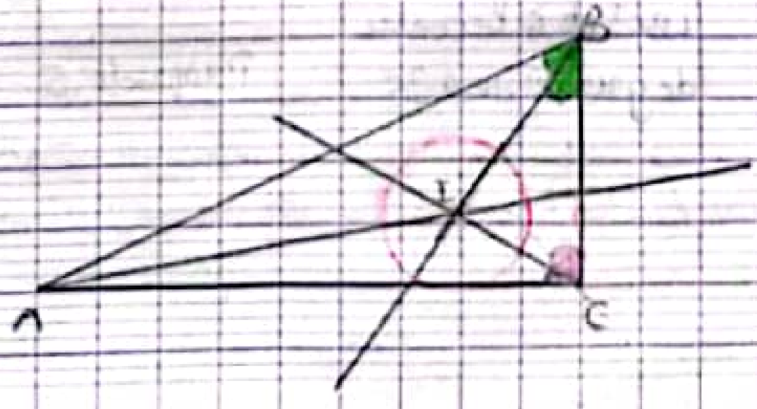


L'orthocentre d'un triangle rectangle est le sommet de l'angle droit.

3. Les bissectrices d'un triangle.

Propriété 3 :

> Les bissectrices d'un triangle ABC sont concourantes en un point I qui est le centre d'un cercle appelé le centre du cercle inscrit dans le triangle.



4- Les médianes d'un triangle

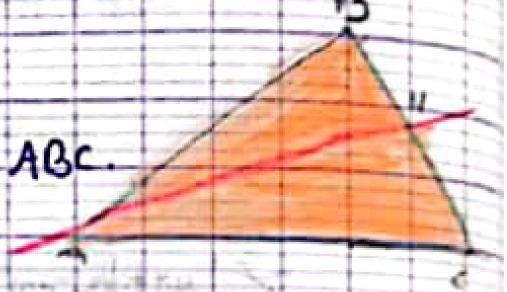
Définition :

La droite qui passe par un sommet d'un triangle et par le milieu du côté opposé à ce sommet est appelé une médiane du triangle.

Exemples:

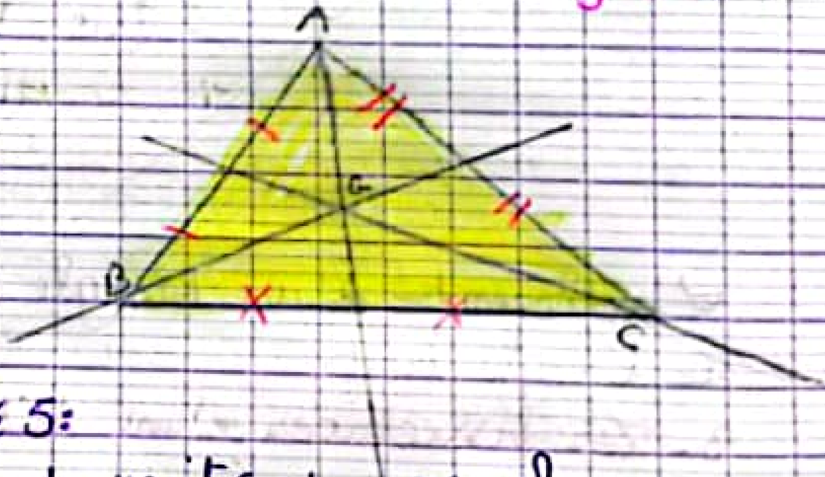
M est le milieu de [BC]

(AM) est une médiane du triangle ABC.



Propriété 4:

Les médianes d'un triangle ABC sont concourantes en un point G appelé le centre de gravité du triangle.



Propriété 5:

Le centre de gravité d'un triangle est situé aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet.

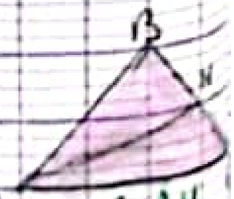
Donnée

M est le milieu de [BC] et G le centre de gravité de ABC

Propriété

Propriété 5

conclusion



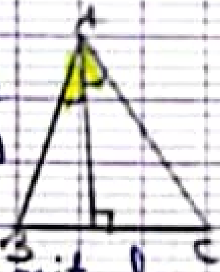
$AG = \frac{2}{3} AM$

Remarque:

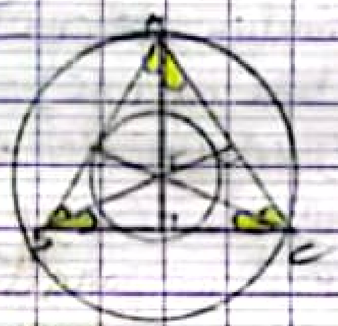
on a aussi : $AG = 2GM$ et $GH = \frac{1}{3} AH$.

Cas particuliers:

1/ triangle isocèle: La bissectrice, la médiane la hauteur issues de A et la médiatrice de [BC] sont confondues.

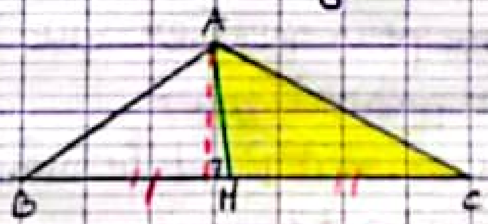


2/ triangle équilatérale: Le centre du cercle inscrit, le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le centre de gravité sont confondus dans un triangle équilatérale.



Propriétés:

La médiatrice d'un triangle ABC partage l'aire de ce triangle en deux aires égales.



Exercice 1p76:

L'orthocentre de ABC est F

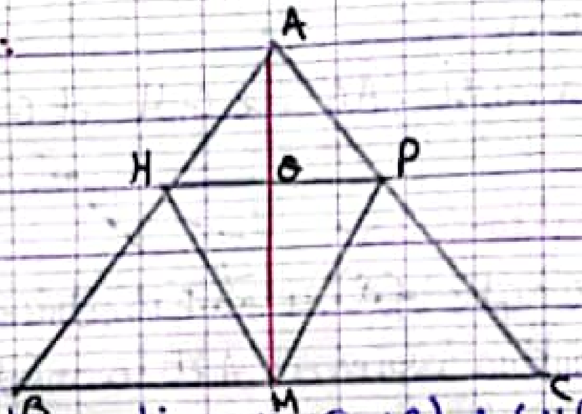
L'orthocentre de CAF est B

E est le centre de gravité de DFC.

M est le milieu de [CF].

Le centre du cercle circonscrit de BDG est I.

Exc 12p 77 :



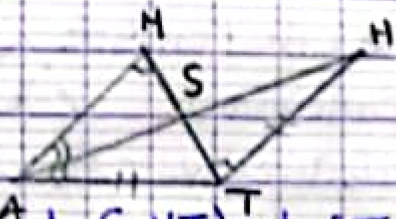
Soit o l'intersection de (CN) et (MP).
on a N milieu de [AB]
on a M milieu de [BC].
Donc (MN) // (AC)
et P ∈ (AC) donc (MN) // (AP).
on a M milieu de [BC]
on a P milieu de [AC]
Donc (MP) // (AB).
et N ∈ (AB) donc (MP) // (AN).
alors ANMP est un parallélogramme
donc o milieu de [AM] et [NP].
ce qui montre de (AM) est la médiane de MNP passant par M
de même pour montrer que (BO) est la médiane de MNP passant par P.
donc ABC et MNP ont le même centre de gravité.

Exercice 13p 77 :

on a E le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
Donc E appartient à la médiatrice de [AB].
et on a F le centre du cercle circonscrit au triangle ABD donc F appartient à la médiatrice de [AB]
Alors (EF) est la médiatrice de [AB]
c.à.d. (EF) ⊥ (AB).
puisque (AB) // (DC).

Alors $(EF) \perp (DC)$.

Ex 4 p 76 :

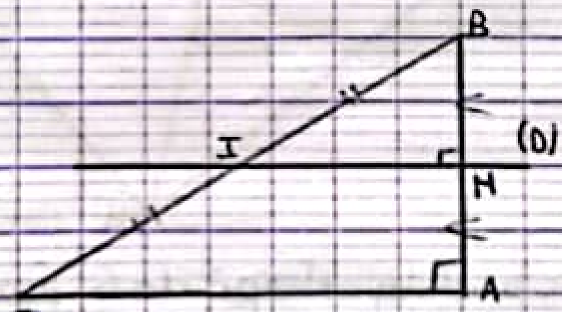


On a $(HA) \perp (HT)$ et $(TH) \perp (HT)$.
Donc $(HA) // (TH)$.
Les parallèles (HA) et (TH) et la sécante (HT) définit les angles $H\hat{A}H$ et $A\hat{H}T$ alternes intérieurs.
Donc $\boxed{H\hat{A}H = A\hat{H}T}$ ①
On a ATH est un triangle isocèle en T.
Donc $\boxed{A\hat{H}T = T\hat{A}H}$ ②
D'après ① et ② on a : $H\hat{A}H = T\hat{A}H$
Donc (AH) est la bissectrice de $H\hat{A}T$.

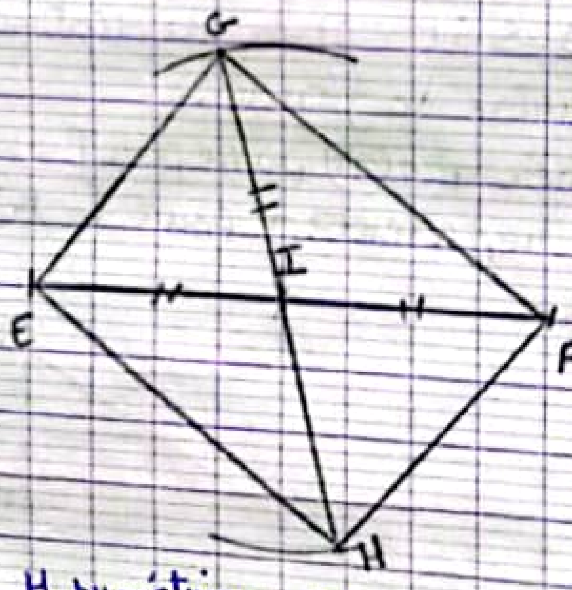
Exercice : ABC un triangle rectangle en A et I milieu de $[BC]$. Soit (D) la médiatrice de $[AB]$.
1) construire la figure.
2) Montrer que (D) passe par I
3) Que représente I pour le triangle ABC ? Justifier

Solution :

1)



2) Soit H milieu de $[AB]$.
On a $(D) \perp (AB)$ car (D) médiatrice de $[AB]$ et $(AB) \perp (AC)$ car ABC est un triangle rectangle en A.
Donc $(D) // (AC)$.
Dans le triangle ABC on a :

$M \in (D)$
$(D) // (AC)$.
Donc (D) coupe $[BC]$ en son milieu.
c.à.D : (D) passe par I.
3/ $I \in (D)$ médiatrice de $[AB]$ et on a I appartient à la médiatrice de $[BC]$ donc I est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et on a :
$IA = IB = IC = \frac{1}{2} BC$.
Exercice : $[EF]$ un segment et I son milieu, G un point tel que $IE = IF = IG$.
Soit H le symétrique de G par rapport à I.
1) Construire la figure.
2) Quelle est la nature du quadrilatère EFHG ? Justifier
3/ En déduire que EFG est un triangle rectangle.
Solution :
1/


2/ on a H symétrique de G par rapport à I
Donc I milieu de $[GH]$.
et I milieu de $[EF]$.
Donc EGFH est un paralélogramme
on a : $EF = 2IE = 2IG = GH$.
Donc : EGFH est un rectangle.