"La Droite dans le Plan"

"I- Repère du plan - Coordonnés d'un point - Cordonnées d'un vecteur :

"1°/ Repère du plan :

Définition :

- Soient O, I et J trois points du plan non alignés.
- On pose : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$
- Le triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ définie un repère du plan
- Le point O s'appelle l'origine du repère
- Le couple $(\vec{i} ; \vec{j})$ s'appelle base du plan
- La droite (OI) s'appelle l'axe des abscisses.
- La droite (OJ) s'appelle l'axe des Ordonnés.
- Si $(OI) \perp (OJ)$ alors le repère $(O; I; J)$ est un repère orthogonal.
- Si $(OI) \perp (OJ)$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1u$ alors le repère (O, I, J) est un repère orthonormé.

2°/ Coordonnées d'un point - Coordonnées d'un vecteur

Activitée : Dans un repère orthonormé du plan (O...

On considère les points suivants : A(1;3) ; B(-1;2) et C(...

1- Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2- Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants : $2\overrightarrow{AB}$; $-3\overrightarrow{BC}$

3- Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants : $2\overrightarrow{AB} + (-3)\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

4- Déterminer les coordonnées du point I le milieu de [AB].

5- Calculer les distances suivantes : AB ; AC et BC

Solution :

1- On a : $A(1;3)$ et $B(-1;2)$

c-a-d, $\vec{AB}\,(x_B - x_A ; y_B - y_A)$

c-a-d, $\vec{AB}\,(-1-1 ; 2-3)$

c-a-d $\vec{AB}\,(-2 ; -1)$

et On a, $\vec{AC}\,(x_C - x_A ; y_C - y_A)$

c-a-d, $\vec{AC}\,(-2-1 ; -1-3$

c-a-d: $\vec{AC}\,(-3 ; -4)$

et On a $\vec{BC}\,(x_C - x_B ; y_C - y_B)$

c-a-d, $\vec{BC}\,(-2+1 ; -1-2)$

c-a-d $\vec{BC}\,(-1 ; -3)$

2- On a $\vec{AB}\,(-2 ; -1)$

c-a-d $2\vec{AB}\,(2\times(-2) ; 2\times(-1))$

c-a-d $2\vec{AB}\,(-4 ; -2)$

c-a-d $\vec{BC}\,(-1 ; -3)$

et On a $-3\vec{BC}\,((-3)\times(-1) ; (-3)\times(-3))$

c-a-d $-3\vec{BC}\,(3 ; 9)$

3- On a : $2\vec{AB}\,(-4 ; -2)$ et $-3\vec{BC}\,(3 ; 9)$

c-a-d: $2\vec{AB} + (-3)\vec{BC}\,(-4+3 ; -2+9)$

Donc : $2\vec{AB} + (-3)\vec{BC}\,(-1 ; 7)$

On a : $\vec{AB}\,(-2 ; -1)$ et $\vec{AC}\,(-3 ; -4)$

c-a-d: $\vec{AB} + \vec{AC}\,(-2-3 ; -1-4)$

Donc : $\vec{AB} + \vec{AC}\,(-5 ; -5)$

4- I le milieu du [AB]

$x_I = \frac{x_B + x_A}{2}$; $y_I = \frac{y_B + y_A}{2}$

$x_I = \frac{-1+1}{2}$; $y_I = \frac{2+3}{2}$

$x_I = 0$; $y_I = \frac{5}{2}$

$I\left(0 ; \frac{5}{2}\right)$

$AB = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{4+1}$

$AB = \sqrt{5}$

$AC = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{9+16}$

$AC = 5$

$BC = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}$

$BC = \sqrt{10}$

Définition :

Soit (O, I, J) un repère du plan

* Soit M un point du plan, il existe un seul $(x; y)$ tel

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

- Le couple $(x; y)$ s'appelle couple de coordonnées du M tel que x est l'abscisse du M et y est l'ordonnée du M et on écrit $M(x; y)$.

* Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan, il existe un seul couple $(x; y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

- Le couple $(x; y)$ s'appelle couple de coordonnées de $\vec{u}$ tel que x est l'abscisse du $\vec{u}$ et y est l'ordonnée de $\vec{u}$ et on écrit $\vec{u}(x; y)$

"- **Propriété :** Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points dans un repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$

* Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$
* Le milieu du $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$
* La distance du AB est $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Scanné avec CamScanner

_Propriété : Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs du plan et $k \in \mathbb{R}$.

- On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$ on écrit $\vec{u} = \vec{v}$.
- La multiplication du vecteur $\vec{u}$ par k est le vecteur $k\vec{u}$ qui a coordonnées $k\vec{u}(kx ; ky)$
- La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ qui a pour coordonnées $\vec{u}+\vec{v}(x+x' ; y+y')$

Application : Soient $\vec{u}(3x+1;2)$ et $\vec{v}(4;y-3)$ deux vecteurs. Déterminer x et y pour que $\vec{u} = \vec{v}$

Solution :

On a : $\vec{u} = \vec{v}$ c-a-d $x_{\vec{u}} = x_{\vec{v}}$ et $y_{\vec{u}} = y_{\vec{v}}$

c-a-d : $3x+1 = 4$ et $2 = y-3$

c-a-d : $3x = 3$ et $5 = y$

Donc : $x = 1$ et $y = 5$

II_Colinéarité de deux vecteurs :

1_Déterminant de deux vecteurs :

Définition :

_Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs du plan.

- Le nombre $xy' - yx'$ s'appelle le déterminant de vecteurs $\vec{u}$ $\vec{v}$ se note $\det(\vec{u};\vec{v})$ tel que :

$$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x.y' - y.x'$$

→ Exemple : On considère les vecteurs suivants $\vec{u}(2;3)$ et $\vec{v}(3;4)$

- $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\times4 - 3\times3$
  $= -1$
- $\det(\vec{v};\vec{u}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\times3 - 4\times2$
  $= 1 = -\det(\vec{u};\vec{v})$
- $\det(2\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 18$
  $= -2$

→ Remarque : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d

* $\det(\vec{u};\vec{v}) = -\det(\vec{v};\vec{u})$
* $\det(k\vec{u};\vec{v}) = \det(\vec{u};k\vec{v}) = k \times \det$

4 - Propriété : Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs du plan. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$

→ Exemple : On a : $\vec{u}(2;3)$ et $\vec{v}(-1;-\frac{3}{2})$

donc $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = -3+3$

$= 0$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Application :

1/ On considère les points suivants : $A(1;-8)$; $B(11;$
$C(5;-1)$ et $D(7;2)$. M.q : $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.

2/ Etudier l'alignement des points E, F et G dans les cas suivants :

a/ $E(-4;2)$; $F(5;1)$ et $G(11;3)$

b/ $E(-2;3)$; $F(0;-1)$ et $G(-1;1)$

Solution :

1/ On a $\vec{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$

c-à-d $\vec{AB}(11-1 ; 7-(-8))$

Donc $\vec{AB}(10;15)$

et On a $\vec{CD}(x_D - x_C ; y_D - y_C)$

c-à-d $\vec{CD}(7-5 ; 2-(-1))$

Donc $\vec{CD}(2;3)$

Alors $\det(\vec{AB};\vec{CD}) = \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 15 & 3 \end{vmatrix} = 10\times 3 - 2\times 15$

$= 30 - 30$

$= 0$

Donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires

2) a/ On a $\overrightarrow{EF}(x_F - x_E ; y_F - y_E)$

c-a-d $\overrightarrow{EF}(5-(-4) ; 1-2)$

c-a-d $\overrightarrow{EF}(9 ; -1)$

et On a $\overrightarrow{EG}(x_G - x_E ; y_G - y_E)$

c-a-d $\overrightarrow{EG}(11-(-4) ; 3-2)$

c-a-d $\overrightarrow{EG}(15 ; 1)$

Donc $Det(\overrightarrow{EF} ; \overrightarrow{EG}) = \begin{vmatrix} 9 & 15 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 9\times 1 - 15\times(-1)$
$= 9 + 15$
$= 24$

Donc $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ ne sont pas colinéaires.
c-a-d les points E, F et G ne sont pas alignés

b/ On a : $\overrightarrow{EF}(x_F - x_E ; y_F - y_E)$

c-a-d $\overrightarrow{EF}(0-(-2) ; -1-3)$

Alors $\overrightarrow{EF}(2 ; -4)$

et On a $\overrightarrow{EG}(x_G - x_E ; y_G - y_E)$

c-a-d $\overrightarrow{EG}(-1-(-2) ; 1-3)$

Alors $\overrightarrow{EG}(1 ; -2)$

Donc $det(\overrightarrow{EF} , \overrightarrow{EG}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 2\times(-2) - 1\times(-4)$
$= -4 + 4$
$= 0$

Donc les deux vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires
D'où les points E, F et G sont des points alignés.

III- La droite dans le plan :

1) Vecteur directeur d'une droite :

Définition : Soit (D) une droite passe par deux points distincts A et B. On appelle vecteur directeur de la droite (D) tout vecteur colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exemple: On considère la droite (D) d'équation
(D) : $y = -x + 1$.

On remarque que la droite (D) passe par les deux points $A(0;1)$ et $B(1;0)$.

Donc $\overrightarrow{AB}(-4;1)$ est un vecteur directeur de la droite (D).

/_ Remarque. Si une droite (D) passe par un point A et $\vec{u}$ un vecteur directeur de (D). On écrit $D(A;\vec{u})$.

2) Équation cartésienne d'une droite :

Activitée : On considère les points $A(3;1)$ et $B(-1;2)$ et soit $M(x;y)$ un point de (AB)

1/ Que peut dire sur la colinéarité de deux vecteurs $\overrightarrow{AM}$

2/ Déduire $Det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB})$

3/ Écrire $Det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB})$ en fonction de x et y

Solution :

1/ On a M un point de (AB)

donc : $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

2/ On a $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

Donc $det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB})=0$

3/ On a : $\overrightarrow{AM}(x_M-x_A;y_M-y_A)$

c-a-d $\overrightarrow{AM}(x-3;y-1)$

et $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$

c-a-d $\overrightarrow{AB}(-1-3;2-1)$

c-a-d $\overrightarrow{AB}(-4;1)$

Donc $det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB})=\begin{vmatrix} x-3 & -4 \\ y-1 & 1 \end{vmatrix}$

$=x-3+4(y-1)$

$=x-3+4y-4$

$=x+4y-7$

Définition : Soient a, b et c trois réels où $(a;b)\neq(0;0)$

Toute droite du plan admet une équation de forme $ax+by+c=0$

L'équation $ax+by+c=0$ s'appelle une équation cartésienne d'une droite

Propriété: L'ensemble de point $M(x;y)$ du plan qui vérifient $ax+by+c=0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$

Remarque: Soit (D) une droite passe par un point $A(x_A;y_A)$ et de vecteur $\vec{u}$ on a:

$M \in D(A;\vec{u}) \Leftrightarrow \vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \det(\vec{AM};\vec{u})=0$

Exemple: On considère les points $A(-3;1)$ et $B(-1;4)$

Déterminons l'équation cartésienne de la droite (AB).

- on a : (AB) passe par A et de vecteur directeur $\vec{AB}$ tel que: $\vec{AB}(-1+3;4-1)$

c-a-d $\vec{AB}(2;3)$

- soit $M(x;y) \in (AB) \Leftrightarrow \det(\vec{AM};\vec{AB})=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+3 & 2 \\ y-1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x+3)-2(y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow 3x+9-2y+2=0$$

$$\Leftrightarrow 3x-2y+11=0$$

- Application:

1. Déterminer l'équation cartésienne de la droite $D(A;\vec{u})$ tel que $A(-2;3)$ et $\vec{u}(-1;3)$

2. " " " (D) passe par $A(-2;3)$ et parallèle à $(\Delta): 2x-y+3=0$

Solution:

1. On a (D) passe par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ tel que: $\vec{u}(-1;3)$ et $A(-2;3)$

Soit: $M(x;y) \in D \Leftrightarrow \det(\vec{AM};\vec{u})=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & -1 \\ y-3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow 3x + 6y - 3 = 0$ / Donc l'équation cartésienne de (D) : $3x+y+3=0$

$\Leftrightarrow 3x + y + 3 = 0$

2/ On a (D) parallèle à $(\Delta) : 2x - y + 3 = 0$

donc $\vec{u}(1, 2)$ vecteur directeur de la droite (D) qui passe par $A(-2;3)$.

Soit $M(x;y) \in (D) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u})$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & 1 \\ y-3 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 2(x+2) - (y-3) = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 4 - y + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2x + y + 7 = 0$

L'équation cartésienne de (D) est : $2x - y + 7 = 0$

3) Représentation paramétrique d'une droite

Activité : Soit (D) une droite passe par $A(2;1)$ de vecteur directeur $\vec{u}(3;-2)$ et soit $M(x;y) \in (D)$

1/ Montrer qu'il existe un nombre réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

2/ Déduire les coordonnées du point M en fonction de t.

Solution :

1/ On a : (D) passe par A et $\vec{u}$ un vecteur directeur de (D) et $M(x;y) \in (D)$

donc $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

d'où il existe un nombre réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

2/ On a : $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

c-a-d : $x_M - x_A = t \cdot x_{\vec{u}}$ et $y_M - y_A = t y_{\vec{u}}$

c-a-d : $x - 2 = t \times 3$ et $y - 1 = t \times (-2)$

c-a-d : $3t + 2$ et $y = -2t + 1$

Définition.

- Soient $A(x_A ; y_A)$ un point du plan et $\vec{u}(a;b)$ un vecteur non nul.
- Le système $\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \end{cases}$ $/ t \in \mathbb{R}$ s'appelle représentation paramétrique d'une droite passe par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

→ **Exemple.** Soit (D) une droite passe par $A(2;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1;3)$

- La représentation paramétrique de (D) est :

$$(D) \begin{cases} x = -1t + 2 \\ y = 3t - 1 \end{cases} / t \in \mathbb{R}$$

→ **Application :** Soient $A(3;-2)$ et $B(5;4)$ deux points du plan.

1/ Déterminer une représentation paramétrique de (AB).

2/ Le point $C(4;-1)$ appartient à la la droite (AB).

3/ Donner une équation cartésienne de la droite (D) : $\begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = -1 + 2t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$

Solution :

1. On a $A(3;-2) \in (AB)$ et $\vec{AB}$ est un vecteur directeur de (AB)

et on a $\vec{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$

c-a-d $\vec{AB}(5-3 ; 4+2)$

Donc $\vec{AB}(2;6)$

Donc :

$$(AB) : \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 6t - 2 \end{cases}$$

2/ On a : $(AB) \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 6t - 2 \end{cases}$ et $C(4;-1)$

c-a-d $\begin{cases} 4 = 2t + 3 \\ -1 = 6t - 2 \end{cases}$

c-a-d $\begin{cases} 4 - 3 = 2t \\ -1 + 2 = 6t \end{cases}$

c-a-d $\begin{cases} 1 = 2t \\ 1 = 6t \end{cases}$

donc $\begin{cases} \frac{1}{2} = t \\ \frac{1}{6} = t \end{cases}$

et puisque $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{6}$

Donc $C \notin (AB)$

3/ On a (D) passe par point $E(-2;-1)$ et de de vecteur directeur $\vec{u}(4;2)$

Soit $M(x;y) \in (D) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{EM}; \vec{u}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & 4 \\ y+1 & 2 \end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow 2x + 4 - 4y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 4y \quad = 0$

IV _ Position relatives de deux droites définis ses équation cartesiennes :

Propriété : Soient (D) et (D') deux droites définies par ses équations cartesiennes tellque :

$$(D) : ax + by + c = 0 \quad \text{et} \quad (D') : a'x + b'y + c' = 0$$

On dit que (D) et (D') sont :

- Parallèles $((D) \parallel (D'))$ si et seulement $ab' - ba' = 0$
- Sécantes si et seulement $ab' - ba' \neq 0$

→ **Exemple :** Soient (D) et (D') deux droites tellque

$(D) : 3x - y - 1 = 0$

et $(D') : -2x + \frac{2}{3}y + 1 = 0$

Etudions la position relative de (D) et (D')

on a : $3 \times \frac{2}{3} - (-1) \times (-2) = 2 - 2$
$= 0$

Donc $(D) \parallel (D')$

Application : Etudier la position relative de (D) et (D') dans les cas suivantes :

- $(D_1) : 6x - 2y + 3 = 0$ et $(D_1') : 2x - \frac{1}{3}y - 1 = 0$
- $(D_2) : x + 2y - 3 = 0$ et $(D_2') : -x - 2y + 4 = 0$
- $(D_3) : 5x - 3y + 2 = 0$ et $(D_3') : 2x - 3y - 5 = 0$
- $(D_4) : -2x + y + 2 = 0$ et $(D_4') : \frac{1}{2}x - y - 7 = 0$

Solution :

- On a $(D_1) : 6x - 2y + 3 = 0$ et $(D_1') : -2x - \frac{1}{3}y - 1 = 0$
  donc $6 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 2 \times (-2) = -\frac{6}{3} + 4 = -2 + 4 = 2$
  Donc $(D_1) \perp (D_1')$
- On a $(D_2) : x + 2y - 3 = 0$ et $(D_2') : -x - 2y + 4 = 0$
  donc $1 \times (-2) - 2 \times (-1) = -2 + 2 = 0$
  Donc $(D_2) \parallel (D_2')$

On a $(D_3) : 5x - 3y + 2 = 0$ et $(D'_3) : 2x - 3y - 5 = 0$

donc : $5 \times (-3) + 3 \times 2 = -15 + 6 = -9$

Donc $(D_3) \perp (D'_3)$

On a $(D_4) : -2x + y + 2 = 0$ et $(D'_4) : \frac{1}{2}x - y - 1 = 0$

donc $-2 \times (-1) - 1 \times \left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Donc $(D_4) \perp (D'_4)$