* Les Polynômes :

I - Définition d'un polynômes - égalité de deux polynomes - opperations sur les polynômes

1/ Définition d'un polynômes :

→ **Activité 1 :** Soit un parallélépipède dont les dimensions x, $x+3$ et $x+5$, avec x un réel positif.
Calculer $V(x)$ le volume du parallélépipède.

→ **Solution 1.** Soit $V(x)$ le volume du parallélépipède
On a $V(x) = x(x+3)(x+5)$
$= (x^2+3x)(x+5)$
$= x^3+5x^2+3x^2+15x$
$= x^3+8x^2+15x$.

Définition

On appelle polynômes, se note souvent P, une expression de la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

Où $a_n, a_{n-1}, \dots$ et a_0 des nombres réels et s'appellent les coefficients du polynôme P

- Si $a_n \neq 0$ alors n s'appelle le degré du polynôme P et se note $d°P$ tel que $d°P = n$
- Si tous les coefficients sont nuls alors le polynôme P s'appelle le polynôme nulle (degré)

→ Exemple. On considère l'expression suivante.

$$P(x) = -5x^4+3x^2+4x-7$$

$P(x)$ est un polynôme de degré 4 et on écrit $d°P = 4$
Les nombres réels $-5; 0; 3; 4; -7$ sont les coefficient de $P(x)$
Car on peut écrire $P(x)$ sous forme : $P(x) =$

Remarque. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b;c) \in \mathbb{R}^2$

- $P(x) = ax + b$, est un polynôme de degré 1 s'appelle
- $P(x) = ax^2 + bx + c$, est un polynôme de degré 2 s'appelle

→ Exemple :

- $P(x) = 2x - 3$ est un binôme
- $P(x) = -4x^2 + x - 1$ est un trinôme

→ **Application**

1- Donner une expression d'un polynôme $P(x)$ dont le degré est 6 et ses coefficient sont $-1; 0; 0; -3; 1$ et 2

2- Parmi les expressions suivantes préciser celles qui représentent un polynôme en précisant son degré

$P(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 3$; $Q(x) = 2x^2$

$R(x) = 5|x|^2 + 4|x|^2 - 5$; $S(x) = (a-1)x^4 + x - 1$

→ **Solution :**

1/ On a P un polynôme de degré 6

alors $P(x) = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + \dots$

et On a : $a_6 = -1$; $a_5 = 0$; $a_4 = 0$

$a_3 = -3$; $a_2 = 1$; $a_1 = 2$; $a_0 = 2$

Donc : $P(x) = -1x^6 + 0 \times x^5 + 0 \times x^4 - 3x^3 + 1x^2 + 2 \times x$

$P(x) = -x^6 - 3x^3 + x^2 + 2x + 2$

2/ $P(x)$ est un polynôme et son degré est 3

$Q(x)$ n'est pas un polynôme

$R(x)$ n'est pas polynôme

$S(x)$ n'est un polynôme et son degré est 4 Si $a \neq 1$

et de degré 1 si $a = 1$

2) Égalité de deux polynômes :

Propriété : Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes.
On dit que $P(x)$ et $Q(x)$ sont égaux ... et on écrit ...
On dit que $P(x)$ et $Q(x)$ sont égaux si et seulement si :
- Ils ont même degré
- Les coefficients des termes de même degré
- sont deux à deux égaux.

Signifie que :

$$\text{Si } \begin{cases} P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \\ Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0 \end{cases}$$

$$\text{Alors } \begin{cases} n = m \\ a_n = b_n ;\ a_{n-1} = b_{n-1} \dots \text{ et } a_0 = b_0 \end{cases}$$

→ **Exemples** : On considère
$P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ et $Q(x) = 3x^2 + x^3 - 4x + 1 + 3x^3$

On a : $Q(x) = 3x^2 + x^3 - 4x + 1 + 3x^3$
$= 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1$

Donc $P(x) = Q(x)$ car $\begin{cases} d°P = d°Q \\ \text{les termes de même degré ont même coefficient.} \end{cases}$

→ **Application** :

1) Étudier l'égalité de $P(x)$ et $Q(x)$ dans les cas suivants.

a) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ et $Q(x) = (x-1)^3$

b) $P(x) = x^3 + (x-1)^2$ et $Q(x) = x^2 - 3x + 1$

c) $P(x) = x^3 + 2x^2(x-1) + x$ et $Q(x) = x^2(3x - 2) + x$

2) Déterminer le nombre réel [illegible] pour que
$P(x) = Q(x)$

Scanné avec CamScanner

$P(x) = (a-1)x^3 + 2a\,x^2 + 5x + 6$

et $Q(x) = x^3 + 4x^2 + (3+a)x + 3a$.

3/ Déterminer a, b, c et d pour que $P(x) = Q(x)$

$P(x) = ax^3 + (b-2)x^2 + (4-c)x + d$

et $Q(x) = -3x^3 + x^2 + 7$

→ Solution :

1/a On a $Q(x) = (x-1)^3$

c-a-d $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

et puisque $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Donc $Q(x) = P(x)$

b/ On a $P(x) = x^3 + (x-1)^2$

c-a-d : $P(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$

et Puisque : $Q(x) = x^2 - 3x + 4$

Alors $Q(x) \neq P(x)$

c/ On a $Q(x) = x^2(3x-2) + x$

c-a-d. $Q(x) = 3x^3 - 2x^2 + x$

et Puisque. $P(x) = x^3 + 2x^2(x-1) + x$

c-a-d. $P(x) = x^3 + 2x^3 - 2x^2 + x$

$= 3x^3 - 2x^2 + x$

Alors : $P(x) = Q(x)$

2/ On a $P(x) = Q(x)$ c-a-d $\begin{cases} a-1 = 1 \\ 2a = 4 \\ 3+a = 5 \\ 3a = 6 \end{cases}$ c-a-d $a = 2$

3/ On a $P(x) = Q(x)$ c-a-d. $\begin{cases} a = -3 \\ b-2 = 1 \\ 4-c = 0 \\ d = 7 \end{cases}$ c-a-d. $\begin{cases} a = -3 \\ b = 3 \\ c = 4 \\ d = 7 \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

3/ Opérations sur les polynômes :

a/ Somme de deux polynômes.

Définition :

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes. La somme de $P(x)$ et $Q(x)$ est le polynôme qu'on note $P+Q$ telque : $(P+Q)(x) = P(x)+Q(x)$

→ Exemple : On a $P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 1$

et $Q(x) = 3x^3 - 2x^2 + 2x - 4$

donc $P(x) + Q(x) = x^4 + 2x^3 + 2x - 5$

Remarque : Si $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes non nuls et $P+Q$ un polynôme non nul alors on a :

$d°(P+Q) \leq d°P$ ou $d°(P+Q) \leq d°Q$

b/ Produit de deux polynômes.

Définition

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes le produit de $P(x)$ et $Q(x)$ est le polynôme qu'on note $P \times Q$ tel que $(P \times Q)(x) = P(x) \times Q(x)$

→ Exemple. On a $P(x) = x^2 + 1$ et $Q(x) = x - 1$

donc $P(x) \times Q(x) = (x^2+1)(x-1)$

$= x^3 - x^2 + x - 1$

Remarque si $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes non nuls, alors on a : $d°(P \times Q) = d°P + d°Q$

→ Application : On considère les deux polynômes suivants :

$f(x) = 2x^2 + 3x + 2$ et $g(x) = x^3 - x^2 + 1$

* Calculer :

$A(x) = 2f(x) - 3g(x)$;

$B(x) = f(x) \times g(x)$

$C(x) = (f(x))^2$

→ Solution :

- On a : $A(x) = 2f(x) - 3g(x)$

c-a-d : $2(2x^2+3x-2)-3(x^3-x^2+1)$

c-a-d : $4x^2+6x-4-3x^3+3x^2-3$

Donc : $A(x) = -3x^3+7x^2+6x-7$

- On a : $B(x) = f(x) \times g(x)$

c-a-d $= (2x^2+3x-2)(x^3-x^2+1)$

$= 2x^5-2x^4+2x^2+3x^4-3x^3+3x-2x^3+2x^2-2$

$= 2x^5+x^4-5x^3+4x^2+3x-2$

- On a : $[f(x)]^2 = (2x^2+3x-2)^2$

$= (2x^2+3x)^2 - 2\times(2x^2+3x)\times 2 + 2^2$

$= 2^2x^4+2\times 2x^2\times 3x+3^2x^2-(4x^2+6x)\times 2+4$

$= 4x^4+12x^3+9x^2-8x^2-12x+4$

$= 4x^4+12x^3+x^2-12x+4$

II - La division par $x - \alpha$:

1- La division euclidienne d'un polynôme par $x - \alpha$:

Définition : Soit $P(x)$ un polynôme de degré n ($n \in \mathbb{N}^*$) et soit $\alpha \in \mathbb{R}$ s'il existe un polynôme $Q(x)$ qui vérifie $P(x) = (x-\alpha)Q(x) + P(\alpha)$ alors

- $Q(x)$ s'appelle quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - \alpha$
- $P(\alpha)$ s'appelle reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - \alpha$

→ Exemple : On a $P(x) = x^2 - 8$

alors $P(x) = (x-3)(x+3) + 1$

- Donc : $(x+3)$ est le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-3)$.

* 1 : le reste " " " "

" " " "

Définition. Soit $P(x)$ un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$ on dit que α est une racine de $P(x)$ si et seulement si $P(\alpha) = 0$

→ **Exemple :** Parmi les nombres suivants : déterminer qui sont des racines de $P(x) = x^2 - 2x + 1$; 1 ; -2 ; 3

- On a : $P(1) = 1^2 - 2 \times 1$
$= 2 - 2$
$= 0$

donc : 1 est un nombre de $P(x)$

- On a : $P(-2) = (-2)^2 - 2 \times (-2) + 1$
$= 4 + 4 + 1$
$= 9$

On a : $P(3) = 3^2 - 2 \times 3 + 1$
$= 9 - 6 + 1$
$= 4$

Donc 3 n'est pas une racine de $P(x)$

Donc -2 n'est pas une racine de $P(x)$

→ **Remarque.** Pour effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $(x - \alpha)$ on suit même étapes que celle des nombres entiers naturels

Exemples. Effectuons la division euclidienne de $P(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$ par $x + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 + x^2 - x + 1 & x + 1 \\
\cline{2-2}
-2x^3 - 2x^2 & 2x^2 - x \\
\cline{1-1}
0 - x^2 - x + 1 & \\
x^2 + x & \\
\cline{1-1}
0 + 0 1 &
\end{array}
$$

Donc : $P(x) = (x + 1)(2x^2 - x) + 1$

Définition et Propriété

Soit $P(x)$ un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $d°P = n$

- On dit que $P(x)$ est divisible par $x-\alpha$, s'il existe un polynôme $Q(x)$ de degré $n-1$ tel que $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$
- $P(x)$ est divisible par $(x-\alpha)$ si et seulement si α est une racine de $P(x)$.

→ **Exemple**: on considère le polynôme suivant.

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 3$

- Etudier la divisibilité de $P(x)$ par $x-1$

On a : $P(1) = 2\times(1)^3 - 3\times(1)^2 - 6\times 1 + 3$

$= 2 - 3 - 6 + 3$

$= 1 \neq 0$

Donc 1 n'est pas une racine de $P(x)$

d'où $P(x)$ n'est pas divisible par $x-1$

→ **Application** : (Exercice 6)

- Montrer que $P(x)$ est divisible par $x-\alpha$ dans les cas suivants :

- $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 4$ et $\alpha = 2$
- $P(x) = x^4 - 3x^2 + x - 2$ et $\alpha = -2$
- $P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 12$ et $\alpha = -3$

→ **Solution**:

- $P(2) = 2^3 - 3\times 2^2 + 4\times 2 - 4$

$= 8 - 12 + 8 - 4$

$= 0$

Donc $P(x)$ divisible par $(x-2)$

- $P(-2) = (-2)^4 - 3(-2)^2 - 2 - 2$

$= 16 - 16$

Donc $P(x)$ est divisible par $(x+2)$

+ $P(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 + 4(-3) + 12$

$= -27 + 27 - 12 + 12$

$= 0$

Donc $P(x)$ est divisible par $(x+3)$

Scanné avec CamScanner