" * Équations, Inéquations et Systémes " :

" I - Équations du premier degré à une inconnue :

1 / Équations de forme $ax+b=0$:

✓ Définition : Soient $(a;b) \in \mathbb{R}^2$.

→ Toute égalité de la forme $ax+b=0$; $(a \neq 0)$ s'appelle une équation du premier degré à une inconnue.

* Résolution de l'équation $ax+b=0$

- Si $a=0$ et $b=0$ alors $S=\mathbb{R}$
- Si $a \neq 0$ et $b=0$ alors $S=\{0\}$
- Si $a=0$ et $b \neq 0$ alors $S=\{\emptyset\}$ imp
- Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors $S=\left\{\frac{-b}{a}\right\}$

Application : Resoudre dans $\mathbb{R}$.

1/ On a : $2(x+2) = 4\left(\frac{1}{2}x+1\right)$

$$2x+4 = \frac{4}{2}x+4$$

$$2x-2x = 4-4$$

$$0 = 0$$

$$S = \mathbb{R}$$

2/ On a : $-3x+4 = 6\left(\frac{-1}{2}x+1\right)$

c-a-d : $-3x+4 = \frac{-6}{2}x+6$

c-a-d : $-3x+\frac{6}{2}x = 6-4$

$0 = 2$ impossible

$$S = \{\emptyset\}$$

3/ On a : $4(1-x)+2=0$

$$4-4x+2=0$$

$$-4x=-6$$

$$x=\frac{6}{4}$$

$$x=\frac{3}{2}$$

$$S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$$

Scanné avec CamScanner

4/ On a $5(1-x)-5=0$
c.a.d $5-5x-5=0$
c.a.d $-5x=0$
on a $x=0$
Donc : $S=\{0\}$

2/ Équation de forme $(ax+b)(cx+d)=0$ $((a;c)\in\mathbb{R}^*)$

Propriété :

* Soient $(a,c)\in\mathbb{R}^*$ et $(b,d)\in\mathbb{R}$
$(ax+b)(cx+d)=0$ signifie que $ax+b=0$ ou $cx+d=0$

Donc $S=\left\{\frac{-b}{a};\frac{-d}{c}\right\}$

Application : Résoudre dans $\mathbb{R}$

1/ On a $(3x-1)(2-x)=0$
c-a-d. $3x-1=0$ ou $2-x=0$
c-a-d. $x=\frac{1}{3}$ ou $x=2$
Donc $S=\left\{\frac{1}{3};2\right\}$

2/ On a $(-3x-5)(x^2-9)=0$
c-a-d: $-3x-5=0$ ou $x^2-9=0$
c-a-d. $x=-\frac{5}{3}$ ou $x^2=9$
c-a-d. $x=\frac{-5}{3}$ ou $x=3$ ou $x=-3$
Donc. $S=\left\{-3;\frac{-5}{3};3\right\}$

3/ On a : $4(x-1)^2=25$
c-a-d: $(2(x-1))^2-5^2=0$
c-a-d: $(2x-2-5)(2x-2+5)=0$
c-a-d. $(2x-7)(2x+3)=0$
c-a-d: $2x-7=0$ ou $2x+3=0$
c-a-d. $x=\frac{7}{2}$ ou $x=\frac{-3}{2}$
$S=\left\{-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right\}$

3/ Équations de forme $\frac{ax+b}{cx+d}=0$ $((a;c)\in\mathbb{R}^{*2})$:

→ Propriété : Soient $(a;c) \in \mathbb{R}^*$ et $(b;d) \in \mathbb{R}$

→ Pour résoudre l'équation $\frac{ax+b}{cx+d} = 0$

→ on détermine la condition d'existence de $\frac{ax+b}{cx+d} = 0$

$\frac{ax+b}{cx+d} = 0$ existe et bien définie ssi $cx+d \neq 0$

Application : Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1/ On a : $\frac{x+3}{8-x} = 0$ avec $x \neq 8$

c-à-d : $x+3 = 0$

c-à-d : $x = -3$

Donc $S = \{-3\}$

2/ On a : $\frac{x^2-9}{5x} = 0$ avec $x \neq 0$

c-à-d : $x^2 - 9 = 0$

c-à-d : $x = -3$ ou $x = 3$

Donc $S = \{-3 ; 3\}$

3/ On a : $\frac{(x+1)(x-2)}{x^2-4} = 0$ avec $x^2 - 4 \neq 0$

$x \neq -2$ et $x \neq 2$

c-à-d : $(x+1)(x-2) = 0$

" : $x+1 = 0$ ou $x - 2 = 0$

" : $x = -1$ ou $x = 2$

Donc : $S = \{-1\}$

3/ Equations de forme $|ax+b| = c$:

Propriété : Soient a, b et c des réels tel que $a \neq 0$.

On considère l'équation $(E) : |ax+b| = c$

- Si $c < 0$ alors (E) n'admet pas de solutions.
- Si $c \geq 0$ alors (E) admet deux solutions : $\frac{c-b}{a}$; $\frac{-c-b}{a}$

Application : Résoudre dans $\mathbb{R}$

1/ On a [illegible]

Sig : [illegible]

Donc $S = \{ [illegible] \}$

2/ On a : [illegible]

Sig : $x = [illegible]$ ou $x = [illegible]$

Donc $S = \{ [illegible] \}$

3/ On a : [illegible]

Sig : [illegible]

[illegible]

Donc $S = \emptyset$ car il [illegible]

II. Inéquations du premier degré à une inconnue

→ Activité :

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

$2x - 1 < 0$	$2x - 1 > 0$
Sig : $x < \frac{1}{2}$	Sig : $x > \frac{1}{2}$
Donc : $S = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$	Donc : $S = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

2/ Compléter le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	

Définition : Soient a et b deux réels tel que $a \neq 0$. Toute inégalité de forme $ax + b \leq 0$ ou $ax + b \geq 0$ ou $ax + b > 0$ ou $ax + b < 0$ s'appelle inéquation du premier degré à une inconnue.

Scanné avec CamScanner

Propriété : Le tableau du signe du binôme $ax+b$ est :

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
$ax+b$	$-a$	0	a

→ Exemple : Résoudre l'inéquation $3x+6<0$

on a : $3x+6=0$

S.q $x=\frac{-6}{3}$

S.q : $x=-2$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$3x+6$	$-$	0	$+$

Donc : $S=]-\infty;-2[$

→ Remarque : Pour étudier le signe de $(ax+b)(cx+d)$ ou $\frac{(ax+b)}{(cx+d)}$ avec $cx+d\neq 0$ on étudie le signe de chaque binôme

Puis on applique les règles de produit :

→ Exemples :

→ Etudions le signe de : $(2x-1)(2x+1)$

on a : $2x-1=0$	on a : $2x+1=0$
s.q : $x=\frac{1}{2}$	s.q : $x=\frac{-1}{2}$

→ Tableau de signe :

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-1)(2x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

→ Etudier le signe de : $\frac{2x-1}{2x+1}$

on a : $2x - 1 = 0$ | on a : $2x - 1 = 0$

S-q : $x = \frac{1}{2}$ | $x = \frac{1}{2}$

→ Tableau de signes

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x - 1$	$-$		$-$ 0	$+$
$2x + 1$	$-$		$+$	$+$
$\frac{2x-1}{2x+1}$	$+$	‖	$-$ 0	$-$

Application :

1- Donner tableau de signe de. $\frac{3x-1}{2x+3}$ et $(\frac{1}{2}x+3)(-x+2)$

2- Résoudre les inéquation :

$(\frac{1}{2}x+3)(-x+2) \leq 0$ et $\frac{3x-1}{2x+3} > 0$

Solution

1- Donnons le tableau de signe de : $\frac{3x-1}{2x+3}$

on a : $3x - 1 = 0$ | on a : $2x+3 = 0$

Alors : $x = \frac{1}{3}$ | Alors : $x = \frac{-3}{2}$

Tableau de signes

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x - 1$	$-$		$-$ 0	$+$
$2x + 3$		0	$+$	$+$
$\frac{3x-1}{2x+3}$	$+$	‖	$-$ 0	$+$

Donner le tableau de signe de : $\left(\frac{1}{2}x+3\right)(-x+2)$

- on a : $\frac{1}{2}x+3=0$ | on a : $-x+2=0$
- S.q : $x=-6$ | S.q : $x=2$

Tableau de signe :

x	$-\infty$ -6 2 $+\infty$
$\frac{1}{2}x+3$	$-$ 0 $+$ | $+$
$-x+2$	$+$ | $+$ 0 $-$
$\left(\frac{1}{2}x+3\right)(-x+2)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$

2/ on a : $\left(\frac{1}{2}x+3\right)(-x+2)\leq 0$

S.q : $x\in\left]-\infty;-6\right]$ ou $x\in\left[2;+\infty\right[$

Donc : $S=\left]-\infty;-6\right]\cup\left[2;+\infty\right[$

D'après la question 1 (Tableau de signe)

- on a : $\frac{3x-1}{2x+3}>0$

S.q : $x\in\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[$ ou $x\in\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

Donc $S=\left]-\infty;\frac{-3}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

III - Equations et inéquations du deuxième degré à une inconnue :

1 - Equations du deuxième degré à une inconnue

Activitée : Soient a, b et c trois réels tel que $a\neq 0$

1- M.que : $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

2- Déduire les solutions de l'equation de l'équation $ax^2+bx+c=0$

→ Solution

1- on a : $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$

$= a\left(x^2+2\times\frac{1}{2}\times\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)$

$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right)$

$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

2- on va résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$

on a : $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

Donc : $ax^2+bx+c=0$ S.q : $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0$

S.q : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$

- Si : $b^2-4ac=0$ alors $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ S.q $x+\frac{b}{2a}=0$

S.q : $x=\frac{-b}{2a}$

Donc : $S=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

- Si $b^2-4ac>0$ alors $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

S.q $x+\frac{b}{2a}=-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ ou $x+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

S.q : $x=\frac{-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{b}{2a}$ ou ...

S.q : $x=\frac{-b-\sqrt{a^2-4ac}}{2a}$ ou $x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Donc $S=\left\{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$

Scanné avec CamScanner

- Si $b^2-4ac<0$ alors $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0$

Donc $S=\{\emptyset\}$

→ **Définition :** Soient a, b et c des réels avec $a\neq0$

✓ Toute égalité de la forme $ax^2+bx+c=0$ s'appelle équation du deuxième degré à une inconnue.

✓ $\Delta=b^2-4ac$ s'appelle le discriminant de l'équation ou bien du trinôme ax^2+bx+c

✓ L'écriture $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$ s'appelle la forme canonique du trinôme ax^2+bx+c.

✓ Toute inégalité de la forme $ax^2+bx+c>0$ ou $ax^2+bx+c\geq0$ ou $ax^2+bx+c<0$ ou $ax^2+bx+c\leq0$ s'appelle inéquation du deuxième degré à une inconnue.

Propriété : Soient a, b et c des réels avec $a\neq0$.

On considère l'équation $(E): ax^2+bx+c=0$

- Si $\Delta<0$ alors (E) n'admet pas de solution on $S=\{\emptyset\}$
- Si $\Delta=0$ alors (E) admet une seule solution $x=\frac{-b}{2a}$ et on écrit $S=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
- Si $\Delta>0$ alors (E) admet deux solutions $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et on écrit $S=\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

Exemple : on résoudre l'équation $2x^2-3x+1$

→ on calcule le disriminant :

on a : $\Delta=b^2-4ac$ avec $\begin{cases}a=2\\b=-3\\c=1\end{cases}$

$=(-3)^2-4\times2\times1$

$= 9 - 8$

$= 1 > 0$

Donc : l'équation admet deux solution α_1 et α_2 tels que :

$\alpha_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\alpha_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\alpha_1 = \frac{3-1}{4}$ et $\alpha_2 = \frac{3+1}{4}$

$\alpha_1 = \frac{1}{2}$ et $\alpha_2 = 1$

Donc $S = \left\{ \frac{1}{2} ; 1 \right\}$

"2 - Les inéquations du deuxième degré à une inconnue" :

→ Propriété : (Factorisation de ax^2+bx+c)

Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$

- Si $\Delta = 0$ alors $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$
- Si $\Delta > 0$ et x_1 et x_2 les solutions de $ax^2+bx+c = 0$ alors $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$
- Si $\Delta < 0$ on ne peut pas factoriser ax^2+bx+c

→ Propriété : Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$

On considère le ax^2+bx+c

- Si $\Delta < 0$ alors le tableau de signe de trinôme ax^2+bx+c est :

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a

- Si $\Delta = 0$ alors le tableau de signe de trinôme est :

x	$-\infty$	$-b/2a$	$+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe de a

• Si $\Delta > 0$ et x_1 et x_2 les solutions de ax^2+bx+c
alors Tableau de signe de trinôme est :

x	$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a 0 signe de $-a$ 0 signe de a

→ Application :

1- Résoudre les équations :

$(E)_1 : 2x^2+5x+3=0$; $(E)_2 : 16x^2+8x+1=0$

$(E)_3 : -3x^2-x-5=0$; $(E)_4 : x^2-5x+4=0$

2- Résoudre les inéquations :

$(I_1) : 2x^2+5x+3<0$; $(I_2) : 16x^2+8x+1>0$

$(I_3) : -3x^2-x-5\leq 0$; $(I_4) : x^2-5x+4>0$

→ Solution :

1- on calcul le discriminant :

• on a (E_1) $2x^2+5x+3=0$

on a $(\Delta) = b^2-4ac$ avec $\begin{cases} a=2 \\ b=5 \\ c=3 \end{cases}$

c-à-d $\Delta = 5^2-4\times 2\times 3$

" $\Delta = 25-24$

" $\Delta = 1$

→ Ainsi cette équation admet deux solutions

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Donc : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

c-à-d $x_1 = \frac{-5-1}{4}$ et $x_2 = \frac{-5+1}{4}$

Alors $x_1 = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = -1$

$S = \left\{-\frac{3}{2} ; -1\right\}$

* on résoudre : (E_2) : $16x^2+8x+1=0$

→ on calcule le discriminant :

$\Delta = b^2-4ac$ avec $\begin{cases} a=16 \\ b=8 \\ c=1 \end{cases}$

$\Delta = 64-64$

$\Delta = 0$

→ Alors l'équation admet une solution.

$\alpha = \frac{-b}{2a}$

$\alpha = \frac{-8}{16\times 2}$

$\alpha = \frac{-1}{4}$

$S = \left\{ \frac{-1}{4} \right\}$

* on résoudre l'équation (E_3) : $-3x^2+x-5=0$

→ on calcule le discriminant.

$\Delta = b^2-4ac$ avec $\begin{cases} a=-3 \\ b=1 \\ c=-5 \end{cases}$

$\Delta = 1^2-4\times(-3)\times(-5)$

$\Delta = 1-60$

$\Delta = -59<0$

→ Alors E_3 n'admet pas de solution

Donc : $S = \{\emptyset\}$

* on résoudre l'équation $E_4 = x^2-5x+4=0$

→ On calcule le discriminant :

$\Delta = b^2-4ac$. avec $\begin{cases} a=1 \\ b=-5 \\ c=4 \end{cases}$

$=(-5)^2-4\times1\times4$

$=25-16$

$\Delta = 9>0$

→ Alors E_4 admet deux solution :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{5-3}{2}$ et $x_2 = \frac{5+3}{2}$

$x_1 = 1$ et $x_2 = 4$

Donc : $S = \{1, 4\}$

2/ on résoudre (I_1) : $2x^2+5x+3<0$

→ on résoudre : $2x^2+5x+3=0$

✓ D'après question 1 on a $2x^2+5x+3=0$

S.a : $x = -1$ ou $x_2 = \frac{-3}{2}$

Donc le tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		$+\infty$
$2x^2+5x+3$		+	0	−	0	+	

Alors $S_1 =]-\frac{3}{2} ; -1[$

• on résoudre (I_2) : $16x^2+8x+1>0$

→ on résoudre : $16x^2+8x+1=0$

✓ D'après la question 1 on a $16x^2+8x+1=0$

S.a : $x = \frac{-1}{4}$

Donc tableau de signe

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$16x^2+8x+1$		+	0	+	

Alors $S =]-\infty ; -\frac{1}{4}[\cup]-\frac{1}{4} ; +\infty[$

• on résoudre (I_3) : $-3x^2+x-5<0$

→ on résoudre : $-3x^2+x-5=0$

✓ D'après la question 1 on a : $-3x^2+x-5=0$

S.a : $S = \{\emptyset\}$

Donc le tableau de signe

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$-3x^2+x-5$	Signe de a $-$ et a = -3 donc négatif

Alors $S = \mathbb{R}$

- on résoudre l'équation (I_2) : $x^2-5x+4 \geq 0$

→ on résoudre $x^2-5x+4=0$

✓ D'après la question 1 on a $x^2-5x+4=0$

S.q. $x_1=1$ ou $x_2=4$

Donc le tableau de signe

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
x^2-5x+4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S =]-\infty, 1] \cup [4, +\infty[$

Propriété : Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$, on considère l'équation : (E) : $ax^2+bx+c=0$

- Si x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation (E) alors on a : $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ $\qquad$ $x_1 \times x_2=\frac{c}{a}$

Application :

1- Sachant que 1 est une solution de l'équation $2x^2-3x+1=0$

Déterminer la deuxième solution de cette équation

2- Résoudre le système suivant : $S : \begin{cases} x+y=13 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$

Solution :

1- on sait que si x_1 et x_2 les solutions de $2x^2-3x+1=0$

Alors : $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ avec $b=-3$; $a=2$ et $x_1=1$

Alors : $1+x_2=\frac{3}{2}$

Alors $x_2 = \frac{1}{2}$

Donc la deuxième solution de cette équation $\frac{1}{2}$

2- On a $\begin{cases} x+y = 13 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$ S.q $\begin{cases} y = 13 - x \\ x = (13 - x) - 12 \end{cases}$

S.q $\begin{cases} y = 13 - x \\ 13x - x^2 - 12 = 0 \end{cases}$

S.q $\begin{cases} y = 13 - x \quad (1) \\ -x^2 + 13x - 12 = 0 \end{cases}$

on va résoudre (E) $= x^2 - 13x + 12 = 0$

on calcule le discriminant

l'on a : $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $\begin{cases} a = 1 \\ b = -13 \\ c = 12 \end{cases}$

$= (-13)^2 - 4 \times 1 \times 2$

$= 121 > 0$

Alors (E) admet deux solution :

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{13 - \sqrt{11}}{2}$ $x_2 = \frac{13 + \sqrt{11}}{2}$

$x_1 = 1$ $x_2 = 12$

on remplace les solutions dans (1).

Si : $x = 1$ alors, 12

et Si : $x = 12$ alors, 1

3/ Factoriser $3x^2 - 4x + 4$

on calcule Δ.

$\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = 3$ $b = 4$ $c = -4$

$= 16 - 4 \times 12$

$= -32$

Alors $3x^2 - 4x + 4 = 0$ n'admet pas de solutions
on peut pas factoriser $3x^2 - 4x + 4$

- Factoriser de $4x^2 + 3x - 1$

on calcule Δ,

on a $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = 4$ $b = 3$ $c = -1$

$= 9 + 16$

$= 25$

Donc $4x^2 + 3x - 1 = 0$ admet deux solution

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \frac{-3 - 5}{8}$ $\qquad = \frac{-3 + 5}{8}$

$= -1$ $\qquad = \frac{1}{4}$

Donc $4x^2 + 3x - 1 = 4(x + 1)(x - \frac{1}{4})$

3 Factoriser $x^2 - x + \frac{1}{4}$

On a, $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

et on a : $(\Delta) = b^2 - 4ac$ avec $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$

$= 1^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{4}$

$= 1 - 1$

$= 0$

Donc $x^2 - x + \frac{1}{4}$ admet une seule solution :

$x = \frac{-b}{2a}$

$x = \frac{1}{2}$

donc : $x^2 - x + \frac{1}{4} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

Alors : $= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

IV - Equation et inéquation du premier degré à deux inconnus - Systèmes :

1 - Equation du premier degré à deux inconnus

Définition : Soient a, b et c des réels avec (a,b
Toute égalité de la forme (E) : $ax + by + c = 0$ es
une équation du premier degré à deux inc
où x et y sont les deux inconnus

→ Remarque :

* L'ensemble des couples (x ; y) qui vérifient (E)
est l'ensemble des solution de (E) qui est inclus
dans $\mathbb{R}^2$
* La résolution de (E) se fait par deux méthodes
la première est de calculer x en fonction de y et
la deuxième est de calculer y en fonction de x
* L'ensemble des solution de (E) ou $(a,b) \neq (0,$
est un ensemble infini :
* La droite d'équation $ax + by + c = 0$ est la
représentation graphique de l'ensemble d
solution de (E)

Application : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les équatio
suivantes

(E) : $2x - 3$

- on va résoudre : (E) : $2x - y = 3$

on a : $2x - y = 3$

S.q : $-y = 3 - 2x$

. Si les droites est parallèles donc n'admet pas de une solution du système et si " sécante " il y a une solution " " " Si " " confondu " y a des solution " " "

s.q: $y = -3 + 2x$

Donc $S = \{(x; -3+2x) / x \in \mathbb{R}\}$

Si $x = 0$; $(0; -3)$

Si $x = -1$; $(-1; -5)$

abcd

(E_2) : $2x - 5 = 0$

- on va résoudre : (E_2) : $2x - 5 = 0$

on a : $2x - 5 = 0$ s.q: $2x = 5$

s.q: $x = \frac{5}{2}$

Donc $S = \{(\frac{5}{2}; y) / y \in \mathbb{R}\}$

2 - Système de deux équations de premier à deux inconnues :

Définition : Soient a, b, c et a', b', c' des réels.

* Le Système $S : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ est appelé système de deux équations du premier degré à deux inconnus

* Le nombre : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$ est appelé : le déterminant du

* Propriété :

On considère le système $S : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ (S)

On pose : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ et $\Delta_y \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$

- (S) admet une seule solution ssi $\Delta \neq 0$,

Dans ce cas la solution de (S) est le couple

$(x;y)$ où $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$ et $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$

- (S) n'admet pas de solution ssi $\Delta = 0$ et $(\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0)$
- (S) admet une infinité des solution ssi $\Delta = 0$ et $(\Delta_x = 0$ et $\Delta_y = 0)$

Applications: Résoudre les systèmes suivants

$$(S_1): \begin{cases} 3x - 4y = -11 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_2): \begin{cases} \frac{1}{2}x - 3y = 1 \\ x - 6y = 2 \end{cases}$$

$$(S_3): \begin{cases} \sqrt{2}x - y = 2\sqrt{2} \\ -2x + \sqrt{2}y = 3 \end{cases}$$

Solution:

→ on calcule Δ:

on a: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

$= 3 \times 6 - 5 \times (-4)$

$= 18 + 20$

$= 38$

on calcule Δ_x:

on a: $\Delta_x = \begin{vmatrix} -11 & -4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$

$= -11 \times 6 - 7 \times (-4)$

$= -66 + 28$

$= 38$

→ on calcule Δ_y:

on a: $\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -11 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

$= 3 \times 7 - 5 \times (-11)$

$= 21 + 55$

$= 76$

→ Donc le système une seule solution

Alors $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$ et $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$

$= \frac{-38}{38}$ et $y = \frac{76}{38}$

$= -1$ $y = 2$

Donc l'ensemble des solution de (S) est :

$S = \{(-1 ; 2)\}$

* on a (S_2) : $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 3y = 1 \\ x - 6y = 2 \end{cases}$

→ on calcule Δ :

on a $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2} \times (-6) - (1) \cdot 3$

$= -3 + 3 = 0$

on calcule Δx :

on a : $\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}$

$= -6 - (-3) \times 2$

$= -6 + 6$

$= 0$

→ On calcule Δy :

on a : $\Delta y = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 1 - 1$

$= 0$

→ Donc (S) admet une infinité de solution

et on a $x - 6y = 2$ } S.a $x = 2 + 6y$

Donc $S = \{(2 + 6y ; y) / y \in \mathbb{R}\}$

on a : (S_3) : $\begin{cases} \sqrt{2}\,x - y = 2\sqrt{2} \\ -2x + \sqrt{2}\,y = 3 \end{cases}$

→ on calcule Δ :

on a $\Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ -2 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$

$= \sqrt{2} \times \sqrt{2} - (-1) \times (-2)$

$= 2 - 2$

on calcule Δx

on a : $\Delta x = \begin{vmatrix} 2\sqrt{2} & -1 \\ 3 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$

$= 2 \times 2 - (-1) \cdot 3$

$= 7$

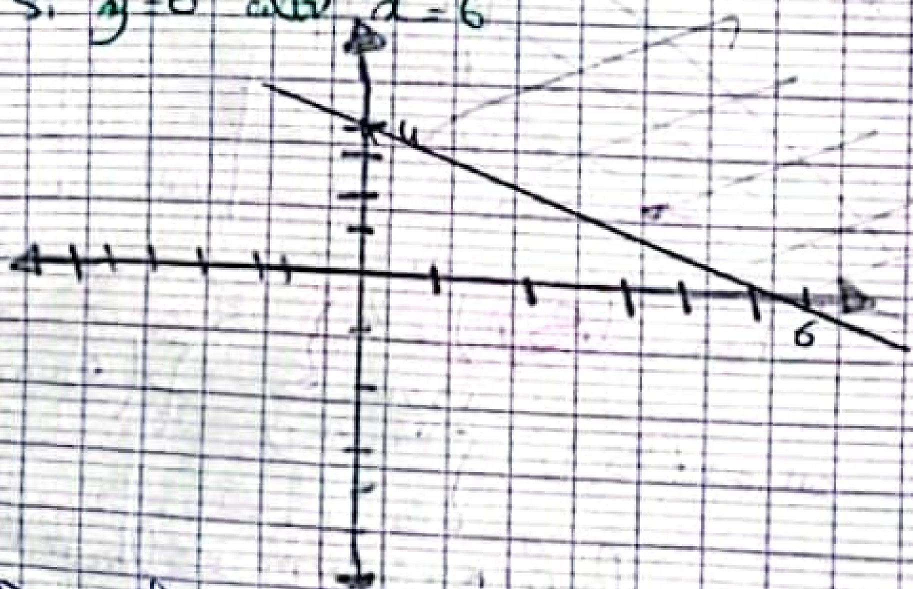
Donc le systeme n'admet pas de solution
$S = \{\emptyset\}$

3. Signe de $ax+by+c$:

Propriété : Le plan est rapporté aux repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit (D) la droite d'equation $ax+by+c=0$
La droite détermine deux demi-plans ouverts telleque :
* Le premier demi-plan est l'ensemble des point $M(x;y)$ qui verifient $ax+by+c > 0$
* Le deuxieme demi-plan est l'ensemble des point $M(x;y)$ qui verifient : $ax+by+c < 0$

Application : Determiner graphiquement l'ensemble des point $M(x;y)$ du plan qui verifient : $2x+3y-12 > 0$

• solution :
on va construire la droite $(D) : 2x+3y-12=0$
Si $x=0$ alors $y=4$
Si $y=0$ alors $x=6$



Donc l'ensemble des solution et la partie coloriée en gris.

Application : Résoudre

$3 - S : \begin{cases} 2x - 3y + 5 < 0 \\ x - 2y \geq 0 \end{cases}$

1- Déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui vérifient : $2x - 3y - 1 \geq 0$

2- Résoudre graphiquement l'inéquation $(I) : x \geq -3$

3- Résoudre graphiquement le système.

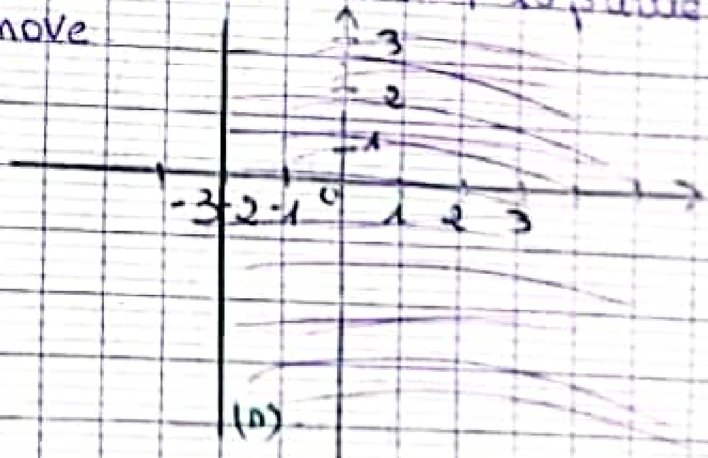
$$S : \begin{cases} 2x - 3y + 5 < 0 & (D_1) \\ x - 2y \geq 0 & (D_2) \end{cases}$$

Solution

2- on va construire la droite $(D) : x = -3$

On a $(0,0)$ vérifient (I)

Donc l'ensemble des solutions est la partie colorée en mauve



3- on va construire la droite $(D_1) : 2x - 3y + 5 = 0$

• Si $x = -1$ alors : $-3y + 3 = 0$

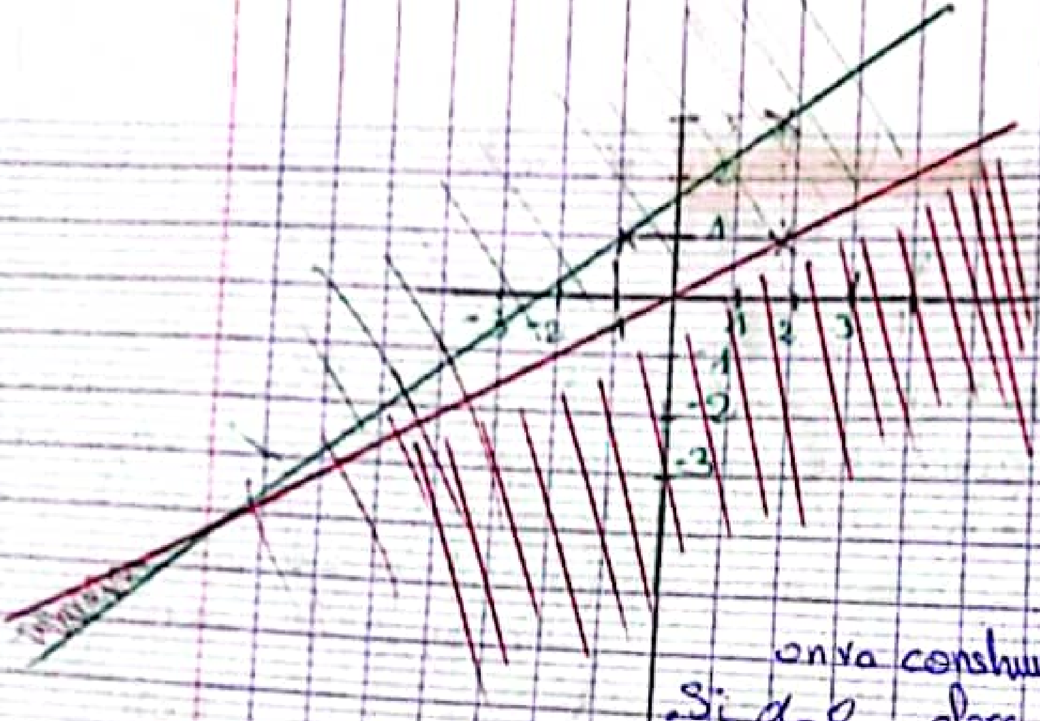
S.q : $y = 1$

Donc $(-1,1) \in (D_1)$

• Si $x = 2$ alors : $-3y + 9 = 0$

Donc : $(2;3) \in (D_1)$

On a $(0,0)$ ne vérifient pas (1)



on va construire $D_2 = x - 2y$

. Si $x = 0$ alors $y = 0$

Donc $(0;0) \in (D_2)$

. Si $x = 2$ alors $2 - 2y = 0$

alors $y = 1$

Donc $(2;1) \in (D_2)$

on a $(1;-1)$ vérifient 2

Donc l'ensemble des solution est la partie colorée en rouge et en bleue.