Chapitre ⑤ : Les systèmes

Système de deux équations du premier degré à deux inconnues

* **Définition :** a, a', b, b', c et c' des nombres réels non nuls

toute écriture de la forme $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ s'appelle système de deux équations du premier degré à deux inconnues x, y

Résoudre un système, c'est trouver les couples (x, y) (s'ils existent) qui vérifient les deux équations.

Systèmes et problèmes

Règle : La résolution d'un problème se fait en quatre étapes :

1) Choix des inconnues : trouvés à la question.
2) Mise en système : transformation des données en équations.
3) Résolution du système : algébriquement
4) Retour au problème : Vérification de la solution et réponse à la question

Résolution des systèmes

Résolution algébrique

Méthode de substitution

* **Définition :** exprimer l'une des inconnues en fonction de l'autre dans une des équations, et la remplacer dans l'autre équation pour trouver une équation à une inconnue.

* **Exemple :** Résolvons $\begin{cases} 2x + y = 11 & ① \\ x + 3y = 18 & ② \end{cases}$

* Dans l'équation ① on a : $y = 11 - 2x$ ③
* On remplace dans l'équation ② :

$$x + 3(11 - 2x) = 18$$
$$-5x = -15 \Rightarrow x = \frac{-15}{-5} = 3$$

* On remplace dans ③ : $y = 11 - 2\times3 = 5$

Alors le couple $(3, 5)$ est la solution de ce système

Si on a pas demandé une méthode à l'exo, on choisit :

* substitution : si le coefficient de l'un des inconnues est 1
* Combinaison graphique : si on a deux termes opposés dans les deux équations.

Méthode de combinaison linéaire

* **Définition :** multiplier chaque équation du système par un nombre convenable pour trouver deux coefficients opposés pour la même inconnue, après on additionne les deux équations membre à membre pour arriver à une équation du premier degré à une inconnue.

* **Exemple :** $\begin{cases} 2x + 3y = 5 & ① \\ 5x + 6y = 14 & ② \end{cases}$

→ Élimination de y.

On multiplie l'équation ① par -2 $\Rightarrow \begin{cases} -4x - 6y = -10 \\ 5x + 6y = 14 \end{cases}$

On additionne membre à membre les équations.

$$-4x - 6y + 5x + 6y = -10 + 14$$
$$\boxed{x = 4}$$

Éliminer x

On multiplie ① par 5 et ② par -2

$$\begin{cases} 10x + 15y = 25 \\ -10x - 12y = -28 \end{cases}$$

$$10x + 15y - 10x - 12y = 25 - 28$$

$$\boxed{y = -1}$$

Remplacer dans l'une des équations.

On remplace dans ① (par exemple)

$$2\times4 + 3y = 5$$
$$\boxed{y = -1}$$

→ La solution est $(4 ; -1)$

Résolution graphique

* **Définition :** lier chaque équation du système par une droite, et déterminer le couple de coordonnées de leur points d'intersection (s'ils existent), cela dans un repère orthonormé, alors ce couple est la solution du système.

* **Exemple :** Résolvons $\begin{cases} 4x - y - 2 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$ (S)

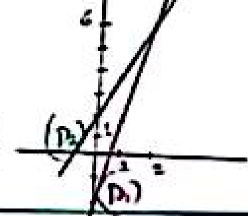
* **pas ① :** Trouver les équations réduites

on trouve $\begin{cases} (D_1) : y = 4x - 2 \\ (D_2) : y = 2x + 2 \end{cases}$ (D_1) et (D_2) n'ont pas la même pente donc sont sécantes

* **pas ② :** Construction.

(D_1) et (D_2) se coupent au point $A(2, 6)$

donc la solution de ce système $(2 ; 6)$



Bilan récapitulatif

$(D) : y = mx + p$ et $(D') : y = m'x + p'$

* $m = m'$
  * $p = p'$: $(D) \equiv (D')$ — Système admet infinité de solutions
  * $p \neq p'$: $(D) // (D')$ — Le système n'a pas de solution
* $m \neq m'$: (D) et (D') se coupent en A donc le système admet unique solution (x_A, y_A)

Rédigé par : Mr BENNASSER Jamal