

Chapitre ①: Les racines carrées

La racine carrée d'un nombre réel positif

1) Définition: a un nombre réel positif
La racine carrée de a c'est le nombre réel positif dont le carré est égale à a noté \sqrt{a}

Résultat $\sqrt{a^2} = a$ $\sqrt{a^2} = -a$

2) Exemples:

* $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$ * $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$
 * $\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$ * $\sqrt{64} = \sqrt{8^2} = 8$
 * $\sqrt{\frac{25}{100}} = \sqrt{\left(\frac{5}{10}\right)^2} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ * $\sqrt{\frac{49}{25}} = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2} = \frac{7}{5}$
 * $\sqrt{0} = \sqrt{0^2} = 0$ * $\sqrt{1} = \sqrt{1^2} = 1$

3) Propriété: a un nombre réel

* Si $a > 0$ alors: $\sqrt{a^2} = \sqrt{a^2} = a$
 * Si $a < 0$ alors: $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a$

Exemples:

* $\sqrt{\left(\frac{11}{5}\right)^2} = \frac{11}{5}$ * $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$
 * $\sqrt{(-7)^2} = 7$ * $\sqrt{(-3)^2} = 3$
 * $\sqrt{(-7-\sqrt{3})^2} = -(-7-\sqrt{3}) = 7+\sqrt{3}$
 * $\sqrt{7+2\sqrt{3}} = \sqrt{7+2\sqrt{3}} = \sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$

Définition

Définition: Conjugué

Le conjugué de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ est $\sqrt{a}+\sqrt{b}$
 Le conjugué de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est $\sqrt{a}-\sqrt{b}$
 Formule: $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$

Résolution de l'équation $x^2 = a$

$a > 0$ $a = 0$ $a < 0$
 L'équation a deux solutions $-\sqrt{a}$ et \sqrt{a} | L'équation a une solution 0 | L'équation n'a pas de solution

+ Exemples:

1) L'équation $3x^2 + 15 = 3$ est équivalente à
 $3x^2 = 3 - 15$
 $3x^2 = -12$
 $x^2 = \frac{-12}{3}$
 $x^2 = -4$

donc cette équation n'a pas de solution.

2) L'équation $2(x^2 - 1) = -2$ est équivalente à

$2x^2 - 2 = -2$
 $2x^2 = -2 + 2$
 $2x^2 = 0$
 $x^2 = 0$
 $x = 0$

Cette équation a une unique solution qui est 0

3) L'équation $2x^2 = 6$ est équivalente à

$x^2 = \frac{6}{2}$
 $x^2 = 3$

Cette équation admet deux solutions $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$

Suppression de la racine du dénominateur

Cas ①: Dénominateur ne contient pas \pm ou $-$

* $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
 * $\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{5 \times 2} = \frac{\sqrt{6}}{10}$
 * $\frac{2+\sqrt{7}}{3\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}(2+\sqrt{7})}{3 \times 11} = \frac{2\sqrt{11} + \sqrt{77}}{33}$

Cas ②: Dénominateur contient \pm ou $-$

* $\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})} = \frac{3(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{2-5}$
 $= \frac{3(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{-3} = \sqrt{5}-\sqrt{2}$
 * $\frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{6}} = \frac{-3\sqrt{3}(4+\sqrt{6})}{(4-\sqrt{6})(4+\sqrt{6})} = \frac{-4\sqrt{3}+\sqrt{18}}{16-6} = \frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{10}$

Les opérations sur les racines carrées

1) Racine carrée et produit:

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ $\sqrt{a^2 \times b} = a \sqrt{b}$

+ Exemple

* $\sqrt{2} \times \sqrt{6} = \sqrt{2 \times 6} = \sqrt{12}$
 * $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$
 * $\sqrt{3^2 \times 12} = 3\sqrt{12}$
 * $\sqrt{25 \times 7} = \sqrt{5^2 \times 7} = 5\sqrt{7}$
 * $\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5} = 2 \times 3 \sqrt{5}$ décomposition
 $= 6\sqrt{5}$

* $\sqrt{4^2} = \sqrt{4^2 \times 7} = \sqrt{(4^2)^2 \times 7} = 4^2 \sqrt{7} = 49\sqrt{7}$

2) Racine carrée et division:

$\sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{b}$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
 $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$

* $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$ * $\sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$