Chapitre 6 : Ordre et opérations

Comparaison de deux nombres réels

Règle
* Si $a-b\leq 0$ alors $a\leq b$
* Si $a-b\geq 0$ alors $a\geq b$

càd, pour comparer deux nombres réels on étudie le signe de leur différence

Exemple $a=\frac{4}{35}$ et $b=\frac{2}{15}$

* $a-b=\frac{4}{35}-\frac{2}{15}=\frac{12-14}{105}=\frac{-2}{105}$

Comme $\frac{-2}{105}<0$ donc $a-b<0$

Alors $a<b$

→ Ordre et inverse

propo 5
a,b positifs
$a\leq b$ signifie que $\frac{1}{a}\geq\frac{1}{b}$

l'inverse change l'ordre

→ Ordre et carré et racine carré

propo 6
a et b positifs
* $a\leq b$ signifie que $a^2\leq b^2$
* $a\leq b$ signifie que $\sqrt{a}\leq\sqrt{b}$

Ordre et opérations

→ ordre et addition

propo 1
$a\leq b$ signifie que $a+c\leq b+c$
$a+c\leq b+c$ signifie que $a\leq b$

propo 2
$a\leq b$
$c\leq d$ signifie que $a+c\leq b+d$

→ ordre et multiplication

propo 3
* $a\leq b$ et $k>0$ signifie que $a\times k\leq b\times k$
* $a\leq b$ et $k<0$ signifie que $a\times k\geq b\times k$

La multiplication par un nombre positif ne change pas l'ordre, mais la multiplication par un nombre négatif change l'ordre

propo 4
a,b,c et d nombres positifs
$a\leq b$
$c\leq d$ signifie que $a\times c\leq b\times d$

* **Exemples:**

Exemple 1: Comparons $2\sqrt{2}$ et $\sqrt{7}$

On a $\begin{cases}(2\sqrt{2})^2=8\\ \sqrt{7}^2=7\end{cases}\Rightarrow\sqrt{7}^2\leq(2\sqrt{2})^2$

alors $\sqrt{7}<2\sqrt{2}$

Exemple 2: Comparons $-2\sqrt{5}$ et $-3\sqrt{2}$

$\begin{cases}(-2\sqrt{5})^2=20\\ (-3\sqrt{2})^2=18\end{cases}\Rightarrow(-3\sqrt{2})^2\leq(-2\sqrt{5})^2$

$\Rightarrow -3\sqrt{2}>-2\sqrt{5}$

Car $-3\sqrt{2}$ et $-2\sqrt{5}$ négatifs

Encadrement

* **Encadrement d'une somme**

$\begin{cases}a\leq x\leq b\\ c\leq y\leq d\end{cases}\Rightarrow a+c\leq x+y\leq b+d$

* **Encadrement d'opposé**

$a\leq x\leq b\Rightarrow -b\leq -x\leq -a$

* **Encadrement d'une différence**

$\begin{cases}a\leq x\leq b\\ c\leq y\leq d\end{cases}\Rightarrow a-d\leq x-y\leq b-c$

On a $a-b=a+(-b)$ donc pour encadrer $a-b$ on encadre d'abord $-b$ après on applique la propo de la somme.

* **Encadrement d'un produit**

On considère tous les nombres positifs

$\begin{cases}a\leq x\leq b\\ c\leq y\leq d\end{cases}\Rightarrow a\times c\leq x\times y\leq b\times d$

tous les nombres doivent être positifs, sinon on encadre l'opposé pour le rendre positif

* **Encadrement d'un inverse**

$a\leq x\leq b\Rightarrow\frac{1}{b}\leq\frac{1}{x}\leq\frac{1}{a}$

* **Encadrement d'un quotient**

On considère tous les nombres positifs

$\begin{cases}a\leq x\leq b\\ c\leq y\leq d\end{cases}\Rightarrow\frac{a}{d}\leq\frac{x}{y}\leq\frac{b}{c}$

On a $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$, pour encadrer $\frac{a}{b}$, on encadre d'abord $\frac{1}{b}$ après on applique la règle du produit

* **Exemple:** $2\leq x\leq 3$ et $-4\leq y\leq -3$

Encadrement de $x+y$

On a $2\leq x\leq 3$
$-4\leq y\leq -3$
$2+(-4)\leq x+y\leq 3+(-3)$
$-2\leq x+y\leq 0$

$x-y$

$-4\leq y\leq -3$
$3\leq -y\leq 4$
$2+3\leq x+(-y)\leq 3+4$
$5\leq x-y\leq 7$

$x\times y$

$2\leq x\leq 3$
$3\leq -y\leq 4$
$2\times 3\leq x\times(-y)\leq 3\times 4$
$6\leq -xy\leq 12$
$-12\leq xy\leq -6$

$\frac{x}{y}$

$-4\leq y\leq -3$
$3\leq -y\leq 4$
$\frac{1}{4}\leq -\frac{1}{y}\leq\frac{1}{3}$
$2\leq x\leq 3$
$2\times\frac{1}{4}\leq x\times -\frac{1}{y}\leq 3\times\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}\leq -\frac{x}{y}\leq 1$
$-1\leq\frac{x}{y}\leq -\frac{1}{2}$