

Ordre et inéquations.

1. Comparaison de deux nombres :

Règle :

Soient a, b deux nombres.

- Si $a - b \geq 0$ alors $a \geq b$
- Si $a - b < 0$ alors $a < b$
- Si $a - b = 0$ alors $a = b$

Pour comparer deux nombres, il faut étudier le signe de leur différence.

Application 1: comparer $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{2}{3}$.

$$\text{On a: } -\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \\ = \frac{(-3) + 4}{6}$$

$$= \frac{1}{6} > 0.$$

$$\text{Donc } -\frac{1}{2} > -\frac{2}{3}.$$

Application 2: Comparer $7a - 1$ et $7a - 5$ avec a un nombre rationnel.

on a:

$$(7a - 5) - (7a - 1) = 7a - 5 - 7a + 1 \\ = -4 < 0.$$

$$\text{Donc } 7a - 5 < 7a - 1.$$

2. Ordre et addition - ordre et multiplication:

Soient a, b et c des nombres rationnels.

- $a < b$ alors $a + c < b + c$
- Si $c > 0$:
 $a < b$ alors $a \times c < b \times c$

Si $c < 0$:

$$a < b \text{ alors } a \times c > b \times c$$

Application: Soient x, y et t des nombres rationnels tel que:

$$x > -1, y - 4 < 2 \text{ et } -3t > 12.$$

Déterminer les inégalités vérifiées par :

$$x + 5; x - 3; 7x; -4x; y; t.$$

(*) On a $x > -1$.

$$x + 5 > (-1) + 5$$

$$x + 5 > 4$$

(*) On a $x > -1$

$$x + (-3) > (-1) + (-3)$$

$$\text{Donc } x - 3 > -4$$

Règle 1:

a, b et c sont des nombres rationnels:

Si $a < b$, alors $a + c < b + c$. Si $a < b$, alors $a - c < b - c$.

Règle 2:

a, b, c et d sont des nombres rationnels positifs: Si $a < c$ et $b < d$, alors: $ab < cd$.

3.

3- L'encadrement:

Règle:

Soient a, b, c, d, x et y des nombres rationnels.

(*) $a < x < b$ alors $a + c < x + c < b + c$

(*) $c > 0$:

$$a < x < b \text{ alors } a \times c < x \times c < b \times c$$

(*) $c < 0$:

$$a < x < b \text{ alors } b \times c < x \times c < a \times c$$

$$(a) a \ll x \ll b$$

$$c \ll y \ll d. \text{ alors: } a+c \ll x+y \ll b+d.$$

soit a, b, c, d, x et y positifs:

$$a \ll x \ll b.$$

$$c \ll y \ll d \text{ alors } ac \ll xy \ll bd.$$

Remarque:

$$a \ll x \ll b \text{ alors } -b \ll -x \ll -a.$$

Application 1: Soient a, b et c des nombres rationnels tel que $-3 \ll a \ll 1$; $-5 \ll b+7 \ll 2$ et $-12 \ll -4c \ll 8$.

Encadrer $a+5$; $a-1$; $5a$; $-3a$; b et c .

(*) Encadrons $a+5$:

$$\text{On a } -3 \ll a \ll 1.$$

$$(-3)+5 \ll a+5 \ll 1+5.$$

$$\text{Donc } 2 \ll a+5 \ll 6.$$

(*) Encadrons $a-1$.

$$\text{On a } -3 \ll a \ll 1.$$

$$(-3)+(-1) \ll a+(-1) \ll 1+(-1).$$

$$-4 \ll a-1 \ll 0.$$

(*) Encadrons $5a$.

$$\text{On a } -3 \ll a \ll 1.$$

$$(-3) \times 5 \ll a \times 5 \ll 1 \times 5.$$

$$\text{Donc } -15 \ll -5a \ll 5.$$

(*) Encadrons $-3a$.

$$1 \times (-3) \ll a \times (-3) \ll (-3) \times (-3).$$

$$\text{Donc } -3 \ll -3a \ll 9.$$

(*) Encadrons b :

$$\text{On a } -5 \ll b+7 \ll 2.$$

$$(-5)+(-7) \ll b+7+(-7) \ll 2+(-7).$$

$$\text{Donc } -12 \ll b \ll -5.$$

Encadrement c:

$$\text{On a } -1 \leq c \leq 8.$$

$$\text{Donc } -\frac{1}{4} \leq -4c \leq \frac{1}{4} \leq (-1) \times \frac{1}{4}.$$

$$\text{Donc } -1 \leq c \leq 3.$$

Application 2: $-1 \leq x \leq 3$ et $-3 \leq y \leq 7$.

$$\text{Encadrement } x+y; x-y; 2x-3y.$$

Encadrement $x+y$:

$$\text{On a } -1 \leq x \leq 3.$$

$$\text{et } -3 \leq y \leq 7.$$

$$\text{Donc } (-1) + (-3) \leq x+y \leq 3+7.$$

$$\text{Alors } -4 \leq x+y \leq 10.$$

Encadrement $x-y$:

$$x-y = x + (-y).$$

$$\text{On a } -3 \leq y \leq 7.$$

$$\text{Donc } -7 \leq -y \leq 3.$$

$$\text{On a } -1 \leq x \leq 3.$$

$$\text{et } -7 \leq -y \leq 3.$$

$$\text{Donc } (-1) + (-7) \leq x + (-y) \leq 3+3.$$

$$\text{Alors } -8 \leq x-y \leq 6.$$

Encadrement $2x-3y$:

$$2x-3y = 2x + (-3y).$$

$$\text{On a } -1 \leq x \leq 3.$$

$$\text{Donc } (-1) \times 2 \leq 2x \leq 3 \times 2$$

$$\text{Alors } -2 \leq 2x \leq 6.$$

$$\text{On a } -3 \leq y \leq 7.$$

$$\text{Donc } 7 \times (-1) \leq y \times (-1) \leq (-3) \times (-1).$$

$$\text{Alors } -7 \leq -y \leq 3.$$

$$\text{On a } -2 \leq 2x \leq 6.$$

$$\text{et } -7 \leq -3y \leq 9.$$

Donc.

$$(-2) + (-21) \leq 2x + (-3y) \leq 6 + 9.$$

$$\text{Alors } -23 \leq 2x - 3y \leq 15.$$

Application 3: $2 \leq a \leq 3$.

$$5 \leq b \leq 7 \text{ et } -4 \leq c \leq -1.$$

Encadrer a , b et bc .

→ Encadrer a et b :

$$\text{On a } 2 \leq a \leq 3.$$

$$\text{et } 5 \leq b \leq 7.$$

$$\text{Donc } 2 \times 5 \leq a \times b \leq 3 \times 7.$$

$$\text{Alors } 10 \leq ab \leq 21.$$

→ Encadrer bc :

$$\text{On a } -4 \leq c \leq -1.$$

$$\text{Donc } 1 \leq -c \leq 4.$$

$$\text{On a } 5 \leq b \leq 7.$$

$$\text{et } 1 \leq -c \leq 4.$$

$$\text{Donc } 5 \times 1 \leq b \times (-c) \leq 7 \times 4.$$

$$\text{Alors } 5 \leq -bc \leq 28.$$

$$\text{Donc } -28 \leq bc \leq -5.$$

Application 4: $-2 \leq z \leq -1$ et $-5 \leq t \leq -3$. Encadrer zt :

$$\text{On a } -2 \leq z \leq -1.$$

$$\text{Donc } 1 \leq -z \leq 2.$$

$$\text{et on a } -5 \leq t \leq -3.$$

$$\text{Donc } 3 \leq -t \leq 5.$$

$$\text{On a } 1 \leq -z \leq 2.$$

$$\text{et } 3 \leq -t \leq 5.$$

$$\text{Donc } 1 \times 3 \leq (-z) \times (-t) \leq 2 \times 5.$$

Alors:

$$3 \leq zt \leq 10.$$

4. Les inéquations:

Soient a et b des nombres rationnels connus et x un nombre rationnel inconnu toute inégalité qui s'écrit sous forme de $ax + b \geq 0$ ou $ax + b < 0$ est appelé inéquation du 1^{er} degré à un seul inconnu.

Applications:

* Résolve l'inéquation:

$$2x + 1 \leq 5.$$

$$2x \leq 5 - 1.$$

$$2x \leq 4.$$

$$x \leq \frac{4}{2}.$$

$$x \leq 2.$$

Donc tous les nombres rationnels qui sont inférieurs ou égale à 2 sont solutions de cette inéquation.

* Résolve l'inéquation:

$$-3x + 1 > -11.$$

$$-3x > (-11) - 1.$$

$$-3x > -12.$$

$$x < \frac{-12}{-3}.$$

$$x < 4.$$

Donc tous les nombres rationnels qui sont inférieurs strictement à 4 sont solution de cette inéquation.

* Résolve l'inéquation.

$$2x - 1 \leq 4x + 5$$

$$2x - 4x \leq 5 + 1.$$

$$-2x \leq 6.$$

$$x \geq \frac{6}{-2}$$

$$x \geq -3.$$

Donc tous les nombres rationnels qui sont supérieurs ou égal à -3 sont solutions

Exercice 1:

1) Comparer a et b dans chaque cas:

• $a - b = -7$.

• $a - b = 1$

• $a - b = 0$.

2) Soit t un nombre rationnels tel que $-1 \leq \frac{-2t+1}{3} \leq 5$
Encadrez t.

3) Si $-4 \leq x \leq -3$ et $-2 \leq y \leq 5$, Encadrez : $x+y$; $y-x$; xy .

4) Résolvez les inéquations:

$-3x+2 > 11$ et $2x-1 < 3x+9$.

Solution:

1) • Si $a - b = -7 < 0$

Alors $a < b$.

• Si $a - b = 1 > 0$.

Alors $a > b$.

• Si $a - b = 0$.

Alors $a = b$.

2) $-1 \leq \frac{-2t+1}{3} \leq 5$.

$(-1) \times 3 \leq \frac{-2t+1}{3} \times 3 \leq 5 \times 3$

$-3 \leq -2t+1 \leq 15$

$(-3) + (-1) \leq -2t+1 + (-1) \leq 15 + (-1)$

$-4 \leq -2t \leq 14$.

$14 \times \frac{1}{-2} \leq -2t \times \frac{1}{-2} \leq (-4) \times \frac{1}{-2}$

$-7 \leq t \leq 2$.

3) (a) Encadrons $x+y$.

On a $-4 \leq x \leq -3$.

et $-2 \leq y \leq 5$.

Donc $(-4) + (-2) \leq x+y \leq (-3) + 5$.

Alors $-6 \leq x+y \leq 2$.

(*) Encadrons $y - x$.

$$y - x = y + (-x)$$

$$\text{On a } -4 \leq x \leq -3.$$

$$\text{Donc } 3 \leq -x \leq 4.$$

$$\text{On a } 2 \leq y \leq 5.$$

$$\text{et } 3 \leq -x \leq 4.$$

$$\text{Donc } 2 + 3 \leq y + (-x) \leq 5 + 4.$$

$$\text{Ainsi } 5 \leq y - x \leq 9.$$

(*) Encadrons $x y$:

$$\text{On a } 3 \leq -x \leq 4.$$

$$\text{et } 2 \leq y \leq 5.$$

$$\text{Donc } 3 \times 2 \leq (-x) \times y \leq 4 \times 5.$$

$$\text{Ainsi } 6 \leq -xy \leq 20.$$

$$-8 \leq xy \leq -6.$$

$$4) -3x + 2 \geq 11.$$

$$-3x \geq 11 - 2.$$

$$-3x \geq 9.$$

$$x \geq -\frac{9}{3}.$$

$$x \geq -3.$$

Donc tous les nombres rationnels qui sont inférieurs ou égaux à -3 sont solution de cette inéquation.

$$2x - 1 \leq 3x + 4.$$

$$2x - 3x \leq 4 + 1.$$

$$-x \leq 5.$$

$$x \geq -5.$$

Donc tous les nombres rationnels qui sont supérieurs strictement à -5 sont solution de cette inéquation.